

Задачи к семинару «Основы квантовой механики»

9 сентября 2017 г.

Упражнения (10 баллов)

1. Пусть $\hat{L}$ — произвольный оператор. Покажите, что $\hat{L}\hat{L}^\dagger$ и $\hat{L}^\dagger\hat{L}$ — неотрицательно определённые операторы.
2. Пусть $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ — произвольные операторы. Выразите $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}]$ и $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}]$ через $[\hat{A}, \hat{B}]$, $[\hat{B}, \hat{C}]$ и $[\hat{C}, \hat{A}]$.
3. Состояние трёхмерной частицы описывается волновой функцией $\psi(x, y, z)$. Какова вероятность того, что частица находится в интервале $z_1 < z < z_2$, а импульс находится в интервале $p_1 < p_y < p_2$?

Задачи (90 баллов)

Задача 1. Соотношение неопределённостей Гейзенберга (10 баллов)

Пусть $\hat{A}$, $\hat{B}$ — эрмитовы операторы, и $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$; и пусть система описывается некоторой волновой функцией $|\psi\rangle$.

1. Покажите, что $\hat{C}$ в таком случае тоже является эрмитовым оператором.
2. Пусть α , a и b — произвольные параметры. Постройте оператор $\hat{L} = \alpha(\hat{A} - a) + i(\hat{B} - b)$; используя результат первого упражнения, покажите, что $\left(\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2\right) \cdot \left(\langle \hat{B}^2 \rangle - \langle \hat{B} \rangle^2\right) \geq \frac{1}{4} \langle \hat{C} \rangle^2$.
3. К чему приводит это соотношение для операторов координаты и импульса?

Задача 2. Гауссов волновой пакет (15 баллов)

Пусть волновая функция $|\psi\rangle$ в координатном представлении имеет вид:

$$\psi(x) = \langle x | \psi \rangle = \exp\left(\frac{ip_0x}{\hbar} - \frac{(x - x_0)^2}{2a^2}\right)$$

Вычислите эту волновую функцию в импульсном представлении $\psi(p) = \langle p | \psi \rangle$. Найдите среднее значение $\langle \hat{x} \rangle$, $\langle \hat{p} \rangle$, а также дисперсию $\Delta x^2 = \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2$ и $\Delta p^2 = \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2$. Проверьте выполнение соотношения неопределённостей Гейзенберга $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$ для этой волновой функции.

Задача 3. Теорема Эренфеста (15 баллов)

Пусть классическая функция Гамильтона одномерной частицы имеет вид $H(p, x) = \epsilon(p) + U(x)$ (к примеру, $\epsilon(p) = \frac{p^2}{2m}$); квантовый же гамильтониан имеет вид $\hat{H} = H(\hat{p}, \hat{x})$. Покажите, что средние значения координаты и импульса удовлетворяют квантовым аналогам уравнений Гамильтона:

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{x} \rangle = \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial p} \right\rangle, \quad \frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle = - \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial x} \right\rangle$$

Задача 4. Поляризуемость молекулы аммиака (15 баллов)

У молекулы аммиака в «классическом» состоянии $|\uparrow\rangle$ имеется дипольный момент d , направленный параллельно оси симметрии молекулы. Как следствие, если поместить молекулу в электрическое поле $\mathcal{E}$, направленное вдоль оси симметрии, её гамильтониан модифицируется:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_0 + d\mathcal{E} & \Delta \\ \Delta & E_0 - d\mathcal{E} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Определите поляризуемость α состояния с наименьшей энергией.

Задача 5. GHZM (15 баллов)

Рассмотрим частицу с гильбертовым пространством состояний, построенным на двух векторах $|\uparrow\rangle$ и $|\downarrow\rangle$ и наблюдаемые величины $\hat{\sigma}_{x,y}$, задаваемые соотношениями:

$$\hat{\sigma}_x |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle, \quad \hat{\sigma}_x |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle, \quad \hat{\sigma}_y |\uparrow\rangle = -i |\downarrow\rangle, \quad \hat{\sigma}_y |\downarrow\rangle = i |\uparrow\rangle \quad (2)$$

Три таких частицы приготовлены в состоянии:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 |\uparrow\rangle_3 - |\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 |\downarrow\rangle_3) \quad (3)$$

Какие значения могут принимать следующие наблюдаемые:

$$\hat{O}_1 = \hat{\sigma}_{x1} \hat{\sigma}_{y2} \hat{\sigma}_{y3} \quad (4)$$

$$\hat{O}_2 = \hat{\sigma}_{y1} \hat{\sigma}_{x2} \hat{\sigma}_{y3} \quad (5)$$

$$\hat{O}_3 = \hat{\sigma}_{y1} \hat{\sigma}_{y2} \hat{\sigma}_{x3} \quad (6)$$

$$\hat{O}_4 = \hat{\sigma}_{x1} \hat{\sigma}_{x2} \hat{\sigma}_{x3} \quad (7)$$

измеренные в таком состоянии?

Задача 6. Каноническое квантование (20 баллов)

Пусть про операторы $\hat{x}$ и $\hat{p}$ известно, что $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, и у этих операторов имеется непрерывный спектр собственных значений $\mathbb{R}$. Покажите, что в координатном представлении, оператор $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$.

1. По индукции, используя результат второго упражнения, вычислите $[\hat{x}, \hat{p}^n]$.
2. Оператор трансляции определим стандартным образом как $\hat{T}_a = e^{i\hat{p}a/\hbar}$. Используя предыдущий пункт, вычислите коммутатор $[\hat{x}, \hat{T}_a]$.
3. Пусть $|x\rangle$ — базис собственных состояний оператора $\hat{x}$, так что $\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$. Покажите, что построенный оператор $\hat{T}_a$ действительно является оператором трансляции: $\hat{T}_a|x\rangle = |x-a\rangle$.
4. Используя матричный элемент $\langle x|\hat{T}_a|\psi\rangle$ для инфинитезимальной трансляции $a \rightarrow 0$, найдите матричный элемент $\langle x|\hat{p}|\psi\rangle \equiv \hat{p}\psi(x)$.

Из аналогичных соображений можно получить, что $\hat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p}$.