

Задачи к семинарам «Квазиклассическое приближение»

2 и 9 декабря 2017 г.

Упражнения (30 баллов)

Упражнение 1 (15 баллов)

Найдите квазиклассические уровни энергии для следующих потенциалов:

- (5 баллов) треугольная яма $U(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0, \\ Fx, & x > 0. \end{cases}$
- (10 баллов) трёхмерный кулоновский потенциал $U(r) = -\frac{e^2}{r}$ для сферически симметричных состояний; сравните полученный ответ с точным. *Указание:* определите граничное условие в нуле, а в правой точке остановки используйте стандартное.

Указание: обратите внимание, что в обеих задачах в одной из точек остановки линейное приближение для потенциала неприменимо, поэтому условие сшивки необходимо модифицировать. Для второй задачи вам может помочь упражнение 5.2.

Упражнение 2 (5 баллов)

Найдите вероятность квазиклассического туннелирования под барьером $U(x) = \frac{U_0}{\cosh^2(x/a)}$ для частиц энергии $0 < E < U_0$. Сравните ответ с точным, найденным в 5 семинаре.

Упражнение 3 (10 баллов)

В задачах о туннельном расщеплении и распаде, действие необходимо считать между квазиклассическими точками остановки, а не от дна ямы. Вычислите поправку к действию, связанную с этим обстоятельством, с точностью до членов $O(1)$, для следующих задач:

- Расщепление n -того уровня в двухъямном потенциале $U(x) = U_0 \frac{(x^2 - a^2)^2}{a^4}$.
- Уширение n -того уровня в потенциале $U(x) = U_0 \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3} \right)$.

Указание: поправки логарифмические; для нахождения правильного числа под логарифмом, необходимо интеграл разбить на две части, введя вспомогательный промежуточный масштаб. Его нужно ввести таким образом, чтобы в каждой из областей оказалось возможным выбросить различные части, сохраняя тем не менее необходимую точность $O(1)$. В конечном итоге, разумеется, от выбора этого масштаба ответ зависеть не должен.

Задачи (70 баллов)

Задача 1. Почти квазиклассический потенциал (15 баллов)

Определите в квазиклассическом приближении коэффициент отражения частицы энергии E от потенциала, который в некоторой точке x_0 имеет особенность. Исследуйте следующие случаи:

1. Потенциал в точке x_0 испытывает скачок, то есть $U(x_0 - 0) = U_1$ и $U(x_0 + 0) = U_2$.
2. Потенциал в точке x_0 испытывает излом, то есть $U(x < x_0) \approx U_0 - F_1(x - x_0)$ и $U(x > x_0) \approx U_0 - F_2(x - x_0)$.

Задача 2. Хитрый уровень (15 баллов)

Найдите минимальное U_0 , при котором в потенциале следующего вида:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 2a, \\ \left(2 - \frac{|x|}{a}\right)^2 V, & a < |x| < 2a, \\ -U_0, & |x| < a, \end{cases}$$

имеется связанное состояние. Считайте $V \gg 1/ma^2$.

Задача 3. Одномерный кристалл и модель сильной связи (40 баллов)

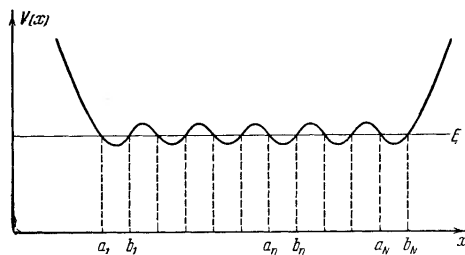


Рис. 1: Модель одномерного кристалла

Рассмотрите потенциал, представляющий собой $N \gg 1$ одинаковых квазиклассических ям, разделённых одинаковыми же туннельными барьерами (см. рис.). Для удобства, вместо нулевых граничных условий ($\psi(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$) предлагается рассмотреть периодические граничные условия, которые формулируются следующим образом: волновая функция в первой яме тождественно совпадает с волновой функцией в $(N+1)$ -ой яме (таким образом, «уникальных» ям ровно N). В такой задаче, n -тый уровень энергии в отдельной яме расщепляется на N подуровней $k = 1, \dots, N$. Определите с квазиклассической точностью уровни энергии $E_{n,k}$.

Указание: вспомните, как в задаче ко второму семинару для двухъямного потенциала из мы писали «эффективный гамильтониан», который в ведущем порядке был просто $\begin{pmatrix} \epsilon_0 & 0 \\ 0 & \epsilon_0 \end{pmatrix}$, и имел экспоненциально малую «туннельную» поправку $\begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}$, которая приводила к расщеплению. Как устроен эффективный такой гамильтониан для этой задачи? Покажите, что при правильном выборе единственного параметра t , этот гамильтониан воспроизводит уровни $E_{n,k}$.