

Задачи к семинару «Матрицы плотности»

16 сентября 2017 г.

Упражнения (55 баллов)

Упражнение 1 (15 баллов) Рассмотрите частицы с угловым моментом 1 в базисе состояний с проекциями $J_z = +1, 0, -1$. Пусть ансамбль описывается следующей матрицей плотности:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

1. Является ли $\hat{\rho}$ допустимой матрицей плотности? Какое состояние она описывает — чистое или смешанное? Найдите энтропию такого состояния.
2. Вычислите среднее значение и среднеквадратичное отклонение наблюдаемой $\hat{J}_z$.

Упражнение 2 (20 баллов) Вычислите среднее значение спина $\langle \mathbf{S} \rangle$ и его флуктуацию $\langle (\mathbf{S} - \langle \mathbf{S} \rangle)^2 \rangle$ для чистого $|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ и смешанного $\hat{\rho} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbb{P}}_{\uparrow} + \hat{\mathbb{P}}_{\downarrow})$ состояний спина-1/2.

Упражнение 3 (20 баллов) Придумайте какую-нибудь наблюдаемую, с помощью которой наблюдатель C сможет отличить состояние «ЭПР» от «классически-запутанного» состояния (из семинара). Выразите её через матрицы Паули.

Задачи (45 баллов)

Задача 1. Блоховское представление двухуровневой системы (25 баллов)

1. Покажите, что матрицу плотности произвольной двухуровневой системы самого общего вида можно разложить по матрицам Паули в следующем виде:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbb{I}} + \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}), \quad (2)$$

где $\mathbf{n}$ — какой-то вектор. При каком условии на $\mathbf{n}$, это — корректная матрица плотности?

2. При каком условии на $\mathbf{n}$, эта матрица плотности описывает чистое состояние?
3. Вычислите средние значения $\langle \hat{\sigma}_{x,y,z} \rangle$ по состоянию, описываемому такой матрицей плотности.

Задача 2 (20 баллов)

Двухуровневая система описывается гамильтонианом $\hat{H} = -\mathbf{h} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$, где $\mathbf{h} = (h_x, h_y, h_z)$, и находится при температуре T . Вычислите средние значения $\langle \hat{\sigma}_{x,y,z} \rangle$.

Указание: для вычисления экспоненты от линейной комбинации матриц Паули (Гиббсовский ансамбль), разложите её в ряд; из-за простого правила произведения матриц Паули, произвольные степени от их линейных комбинаций вычисляются достаточно просто.