

Задачи к семинару «Связанные состояния. Мелкая яма»

23 сентября 2017 г.

Упражнения (35 баллов)

Упражнение 1. Прямоугольная яма (20 баллов)

Рассмотрите задачу о частице в прямоугольном потенциале $U = -U_0\theta(a/2 - |x|)$. Получите уравнение для уровней энергии при произвольных параметрах. Решите его аналитически для низколежащих уровней в пределах мелкой ($mU_0a^2/\hbar^2 \ll 1$) и глубокой ($mU_0a^2/\hbar^2 \gg 1$) ям. Сравните с ранее полученными выражениями.

Упражнение 2. Гауссова яма (15 баллов)

Найдите в пределах мелкой и глубокой ям энергию основного состояния в яме с потенциалом $U = -U_0 \exp(-x^2/a^2)$.

Задачи (65 баллов)

Задача 1. Туннельное расщепление (20 баллов)

Рассмотрите две мелкие ямы, расстояние между которыми много больше размера этих ям $L \gg a$. Такие ямы моделируются дельта-функциональным потенциалом $U(x) = -\frac{\hbar^2 \kappa}{m}(\delta(x - L/2) + \delta(x + L/2))$.

1. В зависимости от расстояния между ямами, определите, при каких условиях сколько связанных состояний имеется в этой системе.
2. Пусть теперь расстояние между ямами много больше характерного масштаба волновых функций в яме (туннельный режим). Определите расщепление между связанными уровнями.
3. Вычислите характер и силу взаимодействия между ямами, если частица всё время находится в основном состоянии.
4. К системе (расстояние между ямами по-прежнему большое) теперь прикладывается очень слабое внешнее электрическое поле $\mathcal{E}$. Вычислите поляризуемость такой системы.

Обратите внимание, что такую систему в базисе локализованных в каждой из ям состояний феноменологически можно описать эффективным гамильтонианом 2×2 следующего вида:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & t \\ t & \varepsilon_0 \end{pmatrix}$$

Задача 2. Глубокая мелкая яма (45 баллов)

Найдите энергию основного состояния в яме, описываемой потенциалом $U(x) = -U_0 \frac{a}{a+|x|}$, считая яму мелкой $U_0 \ll \frac{\hbar^2}{ma^2}$.