Задачи к семинару «Точно решаемые потенциалы. Часть 2»

14 октября 2017 г.

Упражнения (45 баллов)

Упражнение 1. Функция Эйри (20 баллов)

1. **(10 баллов)** Рассмотрите потенциал ($\alpha > 0$), описывающий частицу, «прижимаемую» к бесконечной стенке электрическим полем:

$$V(x) = \begin{cases} Fx, & x > 0, \\ +\infty & x < 0. \end{cases} \tag{1}$$

   Найдите асимптотику для уровней энергии E_n для больших $n \gg 1$.

2. **(10 баллов)** Используя асимптотики функций Эйри для инфинитного движения (без бесконечной стенки), отнормируйте их на дельта-функцию от энергии, а также убедитесь в соотношении полноты. А именно, выпишите волновые функции, удовлетворяющие следующему условию:

$$\int dx \psi_E^*(x) \psi_{E'}(x) = \delta(E - E') \tag{2}$$

   и убедитесь, что для них выполняется соотношение

$$\int dE \psi_E^*(x') \psi_E(x) = \delta(x - x') \tag{3}$$

Упражнение 2. Квантовый гармонический осциллятор (10 баллов)

1. Вычислите $\left\langle \hat{x}^4 \right\rangle$ по произвольному собственному состоянию гармонического осциллятора $|n\rangle$.

2. Частица находилась в основном состоянии гармонического осциллятора с частотой ω. Пусть в какой-то момент времени характерная частота осциллятора мгновенно меняется и становится равной ω'. Вычислите вероятность остаться в основном состоянии.

Упражнение 3. Когерентные состояния (15 баллов)

Когерентные состояния гармонического осциллятора определяются как собственные состояния для понижающего оператора $\hat{a}$, с собственным комплексным числом $\alpha \in \mathbb{C}$: $\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$.

1. Выразите когерентное состояние $|\phi\rangle$ явно через собственные состояния осциллятора, нормировав его условием $\langle 0|\alpha\rangle = 1$.

2. Представьте их в виде $|\alpha\rangle = \hat{C}(\alpha) |0\rangle$; найдите явный вид оператора $\hat{C}(\alpha)$.

3. Вычислите перекрытие когерентных состояний $\langle \alpha|\alpha'\rangle$.

4. Когерентные состояния образуют *переполненный базис*. Докажите следующую формулу для «разложения единицы»:

$$\hat{\mathbb{I}} = \int \frac{d\alpha d\alpha^*}{\pi} \cdot e^{-|\alpha|^2} |\alpha\rangle \langle\alpha| \tag{4}$$

   (мы определили $d\alpha d\alpha^* \equiv d(\mathrm{Re}\alpha) d(\mathrm{Im}\alpha)$).

Задачи (55 баллов)

Задача 1. QHO in a box (25 баллов)

Квантовый гармонический осциллятор помещён в большую «коробку» размера $2L$ ровно посередине, так что потенциальная энергия имеет следующий вид:

$$U(x) = \begin{cases} \frac{m\omega^2 x^2}{2}, & |x| < L \\ \infty, & |x| > L \end{cases} \tag{5}$$

Определите *силу*, с которой осциллятор, находясь в одном из низколежащих уровней энергии $n \ll \frac{L^2}{\hbar/m\omega}$, действует на эти стенки.

Указание: силу можно определить из условия $F = -\frac{\partial E_n(L)}{\partial L}$.

Задача 2. Hydrogen atom in 2D (30 баллов)

Определите уровни энергии и кратности их вырождения, а также стационарные волновые функции для двумерной частицы, движущейся в притягивающем потенциале $U(\boldsymbol{r}) = -\frac{e^2}{r}$. Указание: задача приводится к вырожденной гипергеометрической функции ${}_1F_1$.