

# Задачи к семинару «Теория возмущений»

21 октября 2017 г.

## Задачи (100 баллов)

### Задача 1. Ангармонизм (15 баллов)

Частица с массой  $m$  и зарядом  $e$  движется на кольце радиуса  $R$ . К системе прикладывается сильное электрическое поле  $\mathcal{E}$  (так что  $e\mathcal{E}R \gg \frac{\hbar^2}{mR^2}$ ) параллельно плоскости кольца. В этом пределе низколежащие уровни энергии определяются из осцилляторного приближения — с точки зрения классической механики, достаточно рассмотреть малые колебания вблизи классического положения равновесия. Определите низколежащие уровни энергии  $E_n$  такой системы, а также ведущую поправку от ангармонизма соответствующего потенциала. Каков критерий применимости применяемого осцилляторного приближения?

### Задача 2. Двуслойный графен (15 баллов)

В силу решёточной структуры графена, волновая функция электронов представляет собой двухкомпонентный псевдоспинор  $\psi(x) = (\psi_A(x) \ \psi_B(x))^T$ , где различные компоненты отвечают различным подрешёткам. Возбуждения вблизи так называемой  $K$ -долины зоны Бриллюэна описываются эффективным гамильтонианом размера  $2 \times 2$ , который записывается следующим образом:

$$\hat{H} = v_F \hat{\sigma} \cdot \hat{p} = v_F (\hat{\sigma}_x \hat{p}_x + \hat{\sigma}_y \hat{p}_y) = v_F \begin{pmatrix} 0 & \hat{p}_x - i\hat{p}_y \\ \hat{p}_x + i\hat{p}_y & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Для двуслойного графена, соответственно, волновая функция уже образует четырёхкомпонентный спинор

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_A^{(1)}(x) & \psi_B^{(1)}(x) & \psi_A^{(2)}(x) & \psi_B^{(2)}(x) \end{pmatrix}^T \quad (2)$$

Если бы между не было никакого взаимодействия, то гамильтониан системы имеет просто блочно-диагональный вид  $\hat{H} = v_F \begin{pmatrix} \hat{\sigma} \cdot \hat{p} & 0 \\ 0 & \hat{\sigma} \cdot \hat{p} \end{pmatrix}$ ; однако, если два листа графена положить друг на друга определённым образом, то возникает возможность туннелирования электронов между слоями. Гамильтониан такой системы имеет вид:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & v_F(\hat{p}_x - i\hat{p}_y) & 0 & 0 \\ v_F(\hat{p}_x + i\hat{p}_y) & 0 & \Delta & 0 \\ 0 & \Delta & 0 & v_F(\hat{p}_x - i\hat{p}_y) \\ 0 & 0 & v_F(\hat{p}_x + i\hat{p}_y) & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

При нулевом импульсе  $p$ , матрица имеет двукратно вырожденное собственное число 0 и однократно вырожденные числа  $\pm\Delta$ . Если мы исследуем свойства возбуждений при маленькой энергии  $|E| \ll \Delta$  и, соответственно, малом импульсе  $p \ll \frac{\Delta}{v_F}$ , то высокоэнергетические состояния  $\pm\Delta$  несущественны. Используя теорию возмущений, выведите эффективный гамильтониан, описывающий низкоэнергетические возбуждения, и определите спектр соответствующих двух зон.

### Задача 3. Поляризуемость атома водорода (25 баллов)

Атом водорода находится в основном состоянии, описываемом волновой функцией  $\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$ , где  $a = \frac{\hbar^2}{me^2}$  — Боровский радиус. Он помещается в постоянное электрическое поле, описываемое гамильтонианом  $\hat{V} = -e\mathcal{E}\hat{z}$ ; требуется определить сдвиг уровня энергии и поляризуемость основного состояния.

Для расчёта сдвига энергии во втором порядке теории возмущений, вообще говоря, необходимо вычислять все матричные элементы  $\langle 1, 0, 0 | \hat{z} | n, l, m \rangle$ , а кроме них — ещё и матричные элементы  $\langle 1, 0, 0 | \hat{z} | k, l, m \rangle$  ( $k$  определяет энергию  $\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E$ ) для состояний непрерывного спектра а затем вычислять соответствующую сумму и интеграл. Это — сложная задача; но, к счастью, тут можно поступить иначе. Для этого первую поправку по теории возмущений к волновой функции предлагается найти *точно*, а не искать её в виде разложения.

1. Напишите *точное* уравнение для поправки первого порядка  $\psi^{(1)}(\mathbf{r})$  по теории возмущений. Покажите, что в нём можно разделить переменные, сделав анзац  $\psi^{(1)}(r, \theta) = f(r/a)e^{-r/a} \cos \theta$ ; напишите уравнение на функцию  $f(z = r/a)$ .
2. Покажите, что это уравнение имеет простое полиномиальное решение  $f(z) = A + Bz + Cz^2$ ; найдите  $A, B, C$ .
3. Найдя волновую функцию, вычислите поправку  $E_{100}^{(2)}$  и поляризуемость  $\alpha$ .

*Замечание:* альтернативный способ решения задачи об атоме водорода в постоянном электрическом поле — это использование параболических координат. Эти координаты замечательны в частности тем, что в них разделяются переменные и в электрическом поле; а кроме этого, лишь небольшое количество матричных элементов оператора  $\hat{z}$  отлично от нуля. Именно благодаря этому обстоятельству поправка первого порядка и имеет такой простой вид.

#### Задача 4. Суперсимметричная квантовая механика (45 баллов)

Рассмотрите для простоты квантовый гармонический осциллятор для частицы массы  $m = 1$  с частотой  $\omega = 1$ , гамильтониан которого имеет вид  $\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \hat{x}^2 - 1)$ , так что основное состояние имеет нулевую энергию  $E_0 = 0$ . Помимо этого, осциллятор содержит ангармонизм *очень* специального вида  $V(x) = gx(1 - x^2) + \frac{1}{2}g^2x^4$ ; безразмерный параметр  $g \ll 1$ . Требуется исследовать сдвиг энергии основного состояния с точки зрения теории возмущений.

1. **(10 баллов)** Найдите поправку  $O(g^2)$  к энергии основного состояния осциллятора.
2. **(10 баллов)** Полученный ответ должен вас натолкнуть на мысль, что нужно считать старшие порядки ТВ (если нет, то перепроверьте). Удобнее всего это делать в координатном базисе, выписывая явно дифференциальные уравнения на поправки к волновым функциям. Выпишите такое уравнение на поправки  $O(g)$  и  $O(g^2)$ , и решите их явно.
3. **(20 баллов)** Прodelайте это в *произвольном* порядке теории возмущений, выпишите явно поправку произвольного порядка к волновой функции  $\psi_0^{(n)}(x)$  и  $E_0^{(n)}$ . Просуммируйте весь ряд теории возмущений, и убедитесь, что вы, в действительности, нашли *точное решение* соответствующего уравнения Шрёдингера. Расстройтесь, потому что это решение никак не позволяет ответить на вопрос, каков же в действительности сдвиг энергии основного состояния  $\delta E_0$ .
4. **(5 баллов)** Очевидно, что поправка к энергии основного состояния всё-таки имеется — но она *непертурбативна*, для неё невозможно построить асимптотический ряд по степеням малого параметра  $g$ . Не смотря на это, теорией возмущений всё-таки можно пользоваться для приближения основного состояния, просто использовать для этого *полный ряд* теории возмущений незаконно. Используя критерии применимости теории возмущений, определите максимальный порядок  $n^*$ , до которого результату ещё можно верить.

*Указание:* хотя возмущение и содержит линейный член по  $x$ , с точки зрения вычислений оказывается удобно не сдвигать центр осциллятора.