Задачи к семинару «Нестационарная теория возмущений»

28 октября 2017 г.

Задача 1. Осцилляции Раби (20 баллов)

К атому водорода, находящемся в основном состоянии, прикладывается переменное электрическое поле $\hat{V} = -e\mathcal{E}\hat{z}\cos(\omega t)$ с частотой $\omega = \frac{3}{4}\mathrm{Ry}+\varepsilon$, где «отстройка частоты» и характерная величина электрического поля $e\mathcal{E}a, \varepsilon \ll \mathrm{Ry}$ (тут $\mathrm{Ry} = \frac{me^4}{2\hbar^2}$ — постоянная Ридберга, а $a = \frac{1}{me^2}$ — Боровский радиус); в то же время, соотношение поля $\mathcal{E}$ и отстройки частоты ε, вообще говоря, произвольно. Определите вероятность обнаружить частицу в основном и первом возбуждённом состояниях $n = 1$ и $n = 2$ через большое время T.

Задача 2. Эффект Ландау-Зенера (15 балов)

Рассмотрим произвольную двухуровневую систему, описываемую волновой функцией $|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix}\psi_1(t)\\ \psi_2(t)\end{pmatrix}$ и следующим гамильтонианом, зависящим от времени:

$$\hat{H}(t) = \begin{pmatrix}\alpha t & \gamma \\ \gamma & -\alpha t\end{pmatrix} \tag{1}$$

В начальный момент времени $t \to -\infty$, система находилась в первом состоянии (так что $|\psi_1(t \to -\infty)|^2 = 1$) Определите вероятность перехода системы во второе состояние после такой эволюции $|\psi_2(t \to +\infty)|^2$, считая «скорость движения уровней» большой $\alpha \gg \gamma^2$.

Задача 3. Осциллятор (15 баллов)

Рассмотрите электрон, движущийся в потенциале гармонического осциллятора. К системе приложено меняющееся со временем электрическое поле, так что Гамильтониан имеет вид:

$$\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} + e\mathcal{E}(t)\hat{x}, \quad \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{-t^2/\tau^2} \tag{2}$$

При $t \to -\infty$, электрон находится в основном состоянии системы. Определите вероятность обнаружить его в произвольном n-том возбуждённом состоянии при $t \to +\infty$ в ведущем порядке теории возмущений (считая поле слабым $e^2\mathcal{E}^2 \ll m\omega^3$).

Задача 4. Двухфотонная ионизация (50 баллов)

Используя золотое правило Ферми, на семинаре был вычислена интенсивность ионизации связанного состояния в одномерной дельта-яме $U(x) = -\frac{\kappa}{m}\delta(x)$. В задаче имелся порог ионизации — в частности, при $\omega < E_0 = \frac{\kappa^2}{2m}$, ответ был нулевым. Разумеется, причина этому — использование первого порядка теории возмущений («однофотонное приближение»); реальный ответ отличен от нуля на всех частотах. В данной задаче предлагается исследовать, как устроено обобщение золотого правила Ферми на примере этой же задачи при частотах $\frac{E_0}{2} < \omega < E_0$, где ведущий вклад дают именно двухфотонные процессы.

1. **(15 баллов)** Выведите поправку второго порядка теории возмущений для гармонического возмущения общего вида $\hat{V}(t) = \hat{F}e^{-i\omega t} + \hat{F}^\dagger e^{i\omega t}$ (как и на семинаре) к произвольному коэффициенту $a_f(t)$, считая что изначально частица находилась в каком-то состоянии $|\psi_i\rangle$ дискретного спектра. Структура ответа допускает следующую интерпретацию: переход происходит сперва виртуальным образом на некий промежуточный уровень $i \to \nu$, а затем — в конечное состояние $\nu \to f$. Учтите, что промежуточное состояние ν, вообще говоря, относится к непрерывному спектру.

2. **(10 баллов)** Полученное выражение содержит достаточно много членов, имеющих различную интерпретацию — зависящие от времени части в пределе $t \to \infty$ превратятся в дельта-функцию определённого вида. Учитывая отсутствие однофотонных процессов ($\omega < E_0$), продемонстрируйте, что вклад в пределе $t \to \infty$ будет лишь от одного члена. Исходя из этого, выпишите аналог золотого правила Ферми для этой задачи.

3. **(10 баллов)** Вычислите необходимые матричные элементы переходов из исходного состояния в промежуточное $F_{i\nu}$ и из промежуточного в конечное $F_{\nu f}$. Поскольку как промежуточное, так и конечное состояния относятся к непрерывному спектру, то соответствующий интеграл, формально говоря, расходится. Для его определения воспользуйтесь, к примеру, экспоненциальной регуляризацией $e^{-\alpha|x|}$, рассматривая предел $\alpha \to 0$.

4. **(15 баллов)** Вычислите необходимый интеграл по промежуточным состояниям $d\nu$. Если использовать матричный элемент из предыдущего пункта при $\alpha \equiv 0$, соответствующий интеграл, вообще говоря, разойдётся, поскольку будет содержать полюс на вещественной оси. Однако сколь угодно маленькое $\alpha \to 0$ сдвинет этот полюс в комплексную плоскость, благодаря чему интеграл оказывается возможным вычислить, используя теорему о вычетах. Наконец, используя выведенное во втором пункте обобщение золотого правила Ферми, выпишите, как устроена вероятность ионизации как функция частоты. Ответ выразите через частоту ω, энергию связанного состояния в яме E_0, а также массу m, заряд e и амплитуду электрического поля $\mathcal{E}$. Постройте ответ численно.

Указание: поскольку вычислительно задача достаточно трудоёмкая, крайне рекомендуется для промежуточных вычислений использовать какую-нибудь систему компьютерной алгебры (к примеру, Wolfram Mathematica).