

Задачи к семинару «Адиабатическое приближение в нестационарных задачах. Фаза Берри»

12 октября 2017 г.

Упражнения (15 баллов)

Упражнение 1. Ионизация (10 баллов)

Имеется двухъямный потенциал $U(x) = -\frac{\kappa}{m} \left[\delta\left(x + \frac{L(t)}{2}\right) + \delta\left(x - \frac{L(t)}{2}\right) \right]$. В начальный момент времени ямы разнесены друг от друга бесконечно далеко, $L \rightarrow \infty$, и электрон находится в одной из ям. Расстояние между ямами затем медленно уменьшается до нуля, так что в какой-то момент времени две ямы сливаются в одну: $U(x) = -\frac{2\kappa}{m} \delta(x)$. Определите, с какой вероятностью электрон останется в яме в результате такого процесса.

Упражнение 2. Дышите глубже (5 баллов)

Частица массы m движется в бесконечно глубокой потенциальной яме ширины $a(t)$, которая меняется во времени согласно следующему закону:

$$a(t) = a(1 - \alpha \sin^2 \omega t), \quad \alpha < 1. \quad (1)$$

При каких условиях в такой задаче применимо адиабатическое приближение?

Задачи (85 баллов)

Задача 1 (20 баллов)

Рассмотрите электрон, движущийся в потенциале гармонического осциллятора. К системе приложено меняющееся со временем электрическое поле, так что Гамильтониан имеет вид:

$$H(t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + e\mathcal{E}(t)x, \quad \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{-t^2/\tau^2}. \quad (2)$$

При больших τ применимо адиабатическое приближение. Разложите волновую функцию по мгновенным состояниям гамильтониана и получите уравнения на коэффициенты разложения. Предполагая, что при $t \rightarrow -\infty$ система находится в основном состоянии, найдите вероятности перехода p_{0n} в возбуждённые состояния при $t \rightarrow +\infty$ в первом не исчезающем порядке адиабатического приближения.

Задача 2. Эффект Ааронова-Бома (30 баллов)

Электрон может двигаться по кольцу радиуса R , и находится в связанном состоянии потенциальной ямы $U(\varphi) = -U_0 \delta(\varphi - \varphi_0)$. Через кольцо пропускают магнитный поток Φ , так что гамильтониан системы имеет вид:

$$\hat{H} = \frac{(\hat{p}_\varphi - \frac{e}{c} A_\varphi)^2}{2m} - U_0 \delta(\varphi - \varphi_0), \quad \hat{p}_\varphi = -\frac{i}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi R} \quad (3)$$

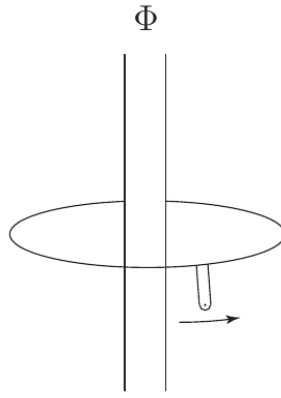


Рис. 1: Иллюстрация к задаче 2

Яму адиабатически медленно обводят вокруг кольца по часовой стрелке — величина φ_0 меняется от $\varphi_0(0) = 0$ до $\varphi_0(T) = 2\pi$. Определите фазу, которую получит волновая функция электрона в результате такой эволюции, считая уровень энергии E_0 связанного состояния известным.

Задача 3. Вот это поворот! (35 баллов)

Рассмотрим квадратный двумерный ящик размера $L \times L$ с бесконечными стенками. Произвольное стационарное состояние можно характеризовать двумя квантовыми числами $|n_x, n_y\rangle$, которые нумеруют количество узлов x и y компонент волновой функции; в частности, состояния $|1, 0\rangle$ и $|0, 1\rangle$ имеют одинаковую энергию. Пусть в начальный момент времени волновая функция представляла собой их произвольную линейную комбинацию:

$$|\psi(0)\rangle = \psi_1 |1, 0\rangle + \psi_2 |0, 1\rangle \quad (4)$$

Затем ящик адиабатически медленно поворачивается в плоскости на угол 2π по часовой стрелке, так что после поворота его новое положение совпадает с исходным. Определите волновую функцию $|\psi(T)\rangle$ после такого поворота.