

Задачи к семинарам «Квазиклассическое приближение»

17 ноября 2018 года

Упражнения (35 баллов)

Упражнение 1. Другие задачи шивки (15 баллов)

Найдите квазиклассические уровни энергии для следующих потенциалов, и сравните полученные ответы с уже известными.

- (5 баллов) треугольная яма $U(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0, \\ Fx, & x > 0. \end{cases}$
- (10 баллов) трёхмерный кулоновский потенциал $U(r) = -\frac{e^2}{r}$ для сферически симметричных состояний. *Указание:* определите граничное условие в нуле, а в правой точке остановки используйте стандартное.

Указание: обратите внимание, что в обеих задачах в одной из точек остановки линейное приближение для потенциала неприменимо, поэтому условие шивки необходимо модифицировать. Для второй задачи вам может помочь упражнение 5.2.

Упражнение 2 (10 баллов)

Найдите вероятность квазиклассического туннелирования под барьером $U(x) = \frac{U_0}{\cosh^2(x/a)}$ для частиц энергии $0 < E < U_0$. Сравните ответ с точным, найденным в 5 семинаре.

Упражнение 3 (10 баллов)

- Отнормируйте волновые функции связанного состояния, которые следуют из правила квантования Бора-Зоммерфельда, на единицу.
- Отнормируйте квазиклассические бегущие волны (в отсутствие отражения) на $2\pi\delta(E - E')$.

Задачи (65 баллов)

Задача 1. Почти квазиклассический потенциал (15 баллов)

Определите в квазиклассическом приближении коэффициент отражения частицы энергии E от потенциала, который в некоторой точке x_0 имеет особенность. Исследуйте следующие случаи:

1. Потенциал в точке x_0 испытывает скачок, то есть $U(x_0 - 0) = U_1$ и $U(x_0 + 0) = U_2$.
2. Потенциал в точке x_0 испытывает излом, то есть $U(x < x_0) \approx U_0 - F_1(x - x_0)$ и $U(x > x_0) \approx U_0 - F_2(x - x_0)$.

Задача 2. Хитрый уровень (20 баллов)

Найдите минимальное U_0 , при котором в потенциале следующего вида:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 2a, \\ \left(2 - \frac{|x|}{a}\right)^2 V, & a < |x| < 2a, \\ -U_0, & |x| < a, \end{cases} \quad (1)$$

имеется связанное состояние. Считайте $V \gg 1/ma^2$.

Задача 3. Одномерный кристалл и модель сильной связи (30 баллов)

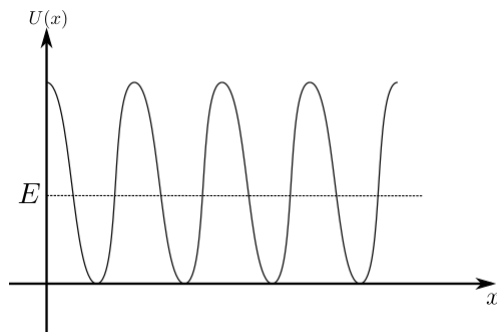


Рис. 1: Модель одномерного кристалла

Определите зоны и их законы дисперсии для периодической задачи, изображённой на рисунке, считая применимым квазиклассическое приближение. Проинтерпретируйте результат в терминах модели сильной связи и следующего гамильтониана (для каждой зоны):

$$\hat{H}_n = \begin{pmatrix} \ddots & -t_n & 0 & 0 & \dots \\ -t_n & E_n & -t_n & 0 & 0 \\ 0 & -t_n & E_n & -t_n & 0 \\ 0 & 0 & -t_n & E_n & -t_n \\ \vdots & 0 & 0 & -t_n & \ddots \end{pmatrix} \quad (2)$$