

Задачи к семинару «Матрицы плотности»

15 сентября 2018 года

Упражнения (20 баллов)

Упражнение 1 (10 баллов) Вычислите среднее значение спина $\langle \mathbf{S} \rangle$ и его флуктуацию $\langle (\mathbf{S} - \langle \mathbf{S} \rangle)^2 \rangle$ для чистого $|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ и смешанного $\hat{\rho} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbb{P}}_{\uparrow} + \hat{\mathbb{P}}_{\downarrow})$ состояний спина-1/2. *Комментарий:* первая величина — это вектор, а вторая — это скаляр, длина вектора.

Упражнение 2 (10 баллов) Предположим, наблюдатель C хочет придумать эксперимент, который сможет отличить состояние «ЭПР» от «классически запутанного» (из семинара). Какую наблюдаемую ему нужно придумать? Выразите её через матрицы Паули (и их тензорные произведения)

Задачи (80 баллов)

Задача 1. Блоховское представление двухуровневой системы (10 баллов)

1. Покажите, что матрицу плотности произвольной двухуровневой системы самого общего вида можно разложить по матрицам Паули в следующем виде:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbb{I}} + \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}), \quad (1)$$

где $\mathbf{n}$ — какой-то вектор. При каком условии на $\mathbf{n}$, это — корректная матрица плотности?

2. При каком условии на $\mathbf{n}$, эта матрица плотности описывает чистое состояние?
3. Вычислите средние значения $\langle \hat{\sigma}_{x,y,z} \rangle$ по состоянию, описываемому такой матрицей плотности.

Задача 2. Термодинамика двухуровневой системы (10 баллов)

Двухуровневая система описывается гамильтонианом $\hat{H} = -\mathbf{h} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$, где $\mathbf{h} = (h_x, h_y, h_z)$, и находится при температуре T . Вычислите средние значения $\langle \hat{\sigma}_{x,y,z} \rangle$.

Задача 3. Квантовый парадокс Зенона (30 баллов)

Рассмотрите двухуровневую систему, описываемую следующим гамильтонианом:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_0 & -\Delta \\ -\Delta & E_0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

В начальный момент система приготовлена в состоянии $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle$. Если бы мы позволили системе эволюционировать самой по себе, то она бы совершала осцилляции Раби; в частности, через время $T = \frac{\pi\hbar}{2\Delta}$ мы бы обнаружили её в состоянии $|\downarrow\rangle$ с вероятностью $P_{\downarrow}(T) = 1$. Однако теперь вместо этого через каждый промежуток времени $\tau \ll T$ мы проводим измерение наблюдаемой $\hat{\sigma}^z$. Определите вероятность $P_{\downarrow}(T)$ в таком случае.

Указание: прочитайте в «материалах семинара» о том, что происходит с матрицей плотности при проведении измерения над системой.

Задача 4. Дефазировка (30 баллов)

Спин-1/2 находится в магнитном поле B_0 , направленном вдоль оси z . Взаимодействие с окружающей средой вносит в магнитное поле случайные флуктуации $\delta B(t)$. Будем считать, что случайная компонента также направлена вдоль Oz и распределена по гауссовому распределению, имеющему нулевое среднее и коррелятор $\langle \delta B(t)\delta B(t') \rangle = \Gamma\delta(t-t')$.

$$\hat{H} = -B \cdot \hat{\sigma}^z, \quad B \equiv B_0 + \delta B(t).$$

Определите зависимость усреднённой по таким флуктуациям¹ матрицы плотности от времени $\langle \hat{\rho}(t) \rangle$ для произвольного начального условия $\rho(0)$.

Указание: в процессе решения вам будет необходимо вычислять средние типа $\left\langle \exp(i \int_{t_1}^{t_2} \delta B(t) dt) \right\rangle$. Это предлагается сделать двумя способами:

1. Воспользоваться *теоремой Вика*: при усреднении по гауссовому распределению все старшие корреляторы выражаются через парный, как сумма всевозможных *сверток*, например, $\langle ABCD \rangle = \langle AB \rangle \langle CD \rangle + \langle AC \rangle \langle BD \rangle + \langle AD \rangle \langle BC \rangle$. Покажите, что из теоремы Вика следует, что для любой гауссовой величины с нулевым средним выполнено $\langle e^A \rangle = e^{\frac{1}{2} \langle A^2 \rangle}$. Воспользуйтесь полученным соотношением.
2. Дискретизовать время, разбив на маленькие участки $t \in (n\delta t, (n+1)\delta t)$, и предположив $\delta B_n = \text{const}$; тогда такой локальный по времени коррелятор эквивалентен $\langle \delta B_n \delta B_m \rangle = \delta_{nm} \cdot \frac{\Gamma}{\delta t}$. В результате вы получите дискретное Гауссово распределение, с которым вы уже умеете работать.

¹Поскольку выражение для произвольной наблюдаемой линейно по $\hat{\rho}$, то её можно и нужно усреднять (в отличие от, например, волновой функции, усреднять которую бессмысленно)