

Задачи к семинару «Связанные состояния. Мелкая яма»

22 сентября 2018 года

Упражнения (15 баллов)

Упражнение 1. Измерение (5 баллов)

Состояние трёхмерной частицы описывается нормированной волновой функцией $\psi(x, y, z)$. Какова вероятность того, что частица находится в интервале $z_1 < z < z_2$, а её импульс — в интервале $p_1 < p_y < p_2$?

Упражнение 2. Прямоугольная яма (10 баллов)

В стандартном курсе квантовой механики вы наверняка сталкивались с задачей о частице в прямоугольной яме:

$$U(x) = \begin{cases} -U_0, & -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

Продемонстрируйте, что в случае, когда эта яма — мелкая, точное решение совпадает с приближённой формулой для мелкой ямы.

Задачи (85 баллов)

Задача 1. Каноническое квантование (15 баллов)

Один из способов построения квантовой механики заключается в постулировании коммутационных соотношений, связанных с классической скобкой Пуассона: $[\hat{A}, \hat{B}] \mapsto i\hbar\{A, B\}$; для канонически сопряжённых операторов координаты и импульса это даёт $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$.

Пусть известно, что у оператора $\hat{x}$ имеется непрерывный спектр собственных значений $\mathbb{R}$, а также известны коммутационные соотношения $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$. Продемонстрируйте, что только этих знаний достаточно, чтобы вывести явный вид оператора импульса в координатном представлении $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$.

Дополнительно: покажите, что не существует конечномерных представлений этой алгебры: операторы $\hat{x}$ и $\hat{p}$, определённые таким образом, не могут действовать в гильбертовом пространстве конечной размерности.

Указания:

1. Вычислите по индукции $[\hat{x}, \hat{p}^n]$.
2. Оператор трансляции определим стандартным образом как $\hat{T}_a = e^{i\hat{p}a/\hbar}$. Используя предыдущий пункт, вычислите коммутатор $[\hat{x}, \hat{T}_a]$.
3. Пусть $|x\rangle$ — базис собственных состояний оператора $\hat{x}$, так что $\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$. Покажите, что построенный оператор $\hat{T}_a$ действительно является оператором трансляции: $\hat{T}_a|x\rangle = |x-a\rangle$.
4. Используя матричный элемент $\langle x|\hat{T}_a|\psi\rangle$ для инфинитезимальной трансляции $a \rightarrow 0$, найдите матричный элемент $\langle x|\hat{p}|\psi\rangle \equiv \hat{p}\psi(x)$.

Задача 2. Туннельное расщепление (10 баллов)

Рассмотрите две мелкие ямы, моделируемые следующим потенциалом:

$$U(x) = -\frac{\hbar^2 \kappa}{m} (\delta(x + L/2) + \delta(x - L/2)) \quad (2)$$

Такая задача включена в стандартный курс квантовой механики; предлагается провести её исследование.

1. Нарисуйте (схематично, но со всеми ключевыми особенностями) зависимость уровней энергии связанных состояний от расстояния между ямами L .

2. Пусть расстояние между ямами много больше характерного масштаба волновых функций для каждой из отдельных ям (туннельный режим), $L \gg \kappa^{-1}$. Определите расщепление между связанными состояниями.
3. Эта задача может быть рассмотрена как модель *ковалентной связи*. Считая теперь L классической динамической переменной, определите силу (в туннельном режиме) и характер взаимодействия между ямами, если частица находится в основном состоянии.

Задача 2.1. Модель сильной связи (20 баллов)

В туннельном режиме, данная задача может также служить иллюстрацией для модели сильной связи, которая описывает пару нижних уровней энергии. Все вычисления в этой задаче необходимо проводить в ведущем приближении по параметру $L \gg \kappa^{-1}$.

1. Спроецируйте гамильтониан на линейное подпространство, натянутое на собственные функции каждой из ям по отдельности: $\{\psi_0(x + \frac{L}{2}), \psi_0(x - \frac{L}{2})\}$. Выпишите соответствующую ему матрицу 2×2 в этом базисе
2. Обратите внимание, что базисные вектора не являются ортогональными. Вычислите матрицу Грама для этого базиса (матрица скалярных произведений $G_{ij} = \langle \psi_i | \psi_j \rangle$).
3. Характеристическое уравнение, определяющее собственные числа для неортонормированного базиса, имеет вид $\det(\hat{H} - E \cdot \hat{G}) = 0$. Найдите собственные уровни энергии в заданном приближении.

Уже исходя из ответа, выясните, какие величины (на самом деле) не было необходимости считать.

Задача 3*. Глубокая мелкая яма (40 баллов)

Найдите энергию основного состояния в яме, описываемой потенциалом $U(x) = -U_0 \frac{a}{a+|x|}$, считая яму мелкой $U_0 \ll \frac{\hbar^2}{ma^2}$.