

Задачи к семинару «Непрерывный спектр. Задача рассеяния»

29 сентября 2018 года

Упражнения (25 баллов)

Упражнение 1 (10 баллов)

Отнормируйте на дельта-функцию от энергии состояния непрерывного спектра, инфинитные в обе стороны для случая, когда потенциал $V(-\infty) = 0$, $V(+\infty) = V_0$, и $E > V_0 > 0$.

Упражнение 2 (15 баллов)

Рассмотрите движение одномерной частицы в поле мелкой ямы, $U(x) = -\frac{\kappa}{m}\delta(x)$. Покажите непосредственным вычислением полноту базиса собственных состояний гамильтониана. Рассмотрите как случай $\kappa > 0$ (когда в яме имеется связанное состояние), так и $\kappa < 0$.

Задачи (75 баллов)

Задача 1. Эволюция волновой функции (25 баллов)

1. Частица находится в основном состоянии гармонического осциллятора $U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$. Потенциал выключают на время T , спустя которое его снова включают. Определите вероятность того, что частица окажется в *основном* состоянии.
2. Определите такую вероятность для потенциала $U(x) = -\frac{\kappa}{m}\delta(x)$, но для случаев малых и больших T . Что означает критерий малости T ?

Подсказка: для асимптотической оценки интеграла в пункте 2 для случая малых T вам может пригодиться¹ приём — преобразование Хаббарда-Стратановича (гауссов интеграл, заменяющий квадратичное по A выражение в экспоненте на линейное):

$$e^{-iA^2} = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{iz^2 - 2izA} \quad (1)$$

Задача 2. Квазистационарные состояния (50 баллов)

В этой задаче мы будем исследовать уравнение Шрёдингера в потенциале следующего вида:

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ \frac{\kappa}{m}\delta(x-a), & x > 0 \end{cases} \quad (2)$$

Рассеивающий потенциал (величину κ) мы будем предполагать сильным. Если заменить этот потенциал на бесконечную стенку, то в этой задаче имеется множество стационарных состояний вида $\psi_n(x) = \sin k_n x$, $k_n = \frac{\pi n}{a}$ и $E_n^{(0)} = \frac{k_n^2}{2m}$. Возможность туннелирования превращает эти состояния в *квазистационарные* — хоть и не стационарные, но долгоживущие, и на достаточно небольших промежутках времени их можно считать стационарными. Ниже будут изложены три различных точки зрения на такие состояния и показана их эквивалентность.

Указание: хоть дальше и идёт речь об энергетическом представлении — во всех промежуточных вычислениях удобнее пользоваться квантовым числом — импульсом $k = \sqrt{2mE}$.

¹А может и не пригодиться, кто знает

Задача 2.1. Распад квазистационарного состояния (25 баллов) В начальный момент времени частица была «приготовлена» в одном из квазистационарных состояний, $\psi(x, t = 0) = \psi_0(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin k_n x$.

1. Определите непрерывный спектр исходной задачи, нормированный на дельта-функцию от разницы энергий.
2. Рассмотрите разложение исходной волновой функции по этому непрерывному спектру. Обратите внимание, что $|\psi(E)|^2$ вблизи $E_n^{(0)}$ имеет максимум; покажите, что в окрестности этого максимума вероятность устроена как лоренциан:

$$|\psi(E)|^2 \approx c \frac{\Gamma_n}{(E - E_n)^2 + \frac{\Gamma_n^2}{4}} \quad (3)$$

и при этом E_n близка к $E_n^{(0)}$, а $\Gamma_n \ll E_n$. Найдите величины c , E_n , Γ_n .

3. Найдите амплитуду того, что через достаточно большое время t частица останется в в этом квазистационарном состоянии $c(t) = \int \psi_0^*(x) \psi(x, t) dx$. Покажите, что на достаточно больших временах соответствующая вероятность $P(t) = |c(t)|^2$ затухает экспоненциально $P(t) \propto \exp(-t/\tau)$. Определите соответствующее «время жизни» τ_n .

Найденное «время жизни» окажется достаточно большим. Это означает, что на временах $t \ll \tau_n$, состояние $|n\rangle$ практически стационарно — волновая функция не меняется, за исключением тривиальной динамической фазы $e^{-iE_n t}$.

Задача 2.2. Задержка волнового пакета (20 баллов) Другой способ «смотреть» на квазистационарные состояния — это исследовать задачу рассеяния.

1. Определите волновые функции исходной задачи, которые соответствуют задаче рассеяния, то есть имеющие асимптотическое поведение $\psi(x \rightarrow \infty) = e^{-ikx} + r e^{ikx}$. Величина коэффициента отражения $R = |r|^2$ тривиальным образом равна единице, поскольку движение инфинитно только в одну сторону; но вот амплитуда отражения $r(E) \equiv e^{2i\delta(E)}$ имеет нетривиальные свойства.
2. Покажите, что амплитуда r , как функция комплексной энергии ε имеет серию полюсов, близких к вещественной оси $\varepsilon_n = E_n - i\Gamma_n/2$. Покажите, что на вещественной оси в окрестности $E \approx E_n$ амплитуда устроена следующим образом:

$$r(E) \approx e^{i\phi} \cdot \frac{E - E_n - i\Gamma_n/2}{E - E_n + i\Gamma_n/2} \quad (4)$$

(с такими же величинами E_n и Γ_n ; такой вид связан с условием $|r|^2 = 1$). Как при этом устроена фаза рассеяния $\delta(E)$?

3. Решите теперь динамическую задачу рассеяния — пусть на такую систему налетает волновой пакет, локализованный по энергии вблизи одного из таких метастабильных состояний, $E \approx E_n$. Определите время задержки такого волнового пакета; и покажите, что непосредственно при резонансе $E = E_n$, время задержки связано с временем жизни метастабильного состояния. Обратите внимание — существенно, что полюса находятся в нижней комплексной полуплоскости; в противном случае мы бы получили $\tau_n < 0$, что очевидным образом противоречит причинности.

С этим эффектом связана иная физическая интерпретация квазистационарных состояний: при рассеянии на резонансе частица «попадает» в метастабильное состояние, где она «застревает» на достаточно продолжительное время, и лишь затем вылетает.

Задача 2.3. Комплексная энергия (5 баллов) Самым удобным способом поиска метастабильных состояний, однако, является следующий формальный трюк, рассматривая стационарное уравнение Шрёдингера для комплексных значений энергии E . Хотя, вообще говоря, такие состояния бессмысленны — они не нормируемы, нефизичны и не входят в базис. Тем не менее, наличие особых решений специального вида является признаком наличия в задаче квазистационарных состояний.

1. Покажите, что стационарное уравнение Шрёдингера $\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + U(x)\right) \psi(x) = \varepsilon \psi(x)$ для некоторых комплексных значений энергии ε_n имеет формальное решение, которое соответствует наличию только расходящейся волны $\psi(x \rightarrow +\infty) = e^{ikx}$, $\text{Re} k > 0$.
2. Покажите, что эти значения имеют вид $\varepsilon_n = E_n - i\Gamma_n/2$; и они в точности совпадают с полюсами амплитуды отражения, найденные в предыдущей задаче.
3. Заметьте, что если бы мы искали решения с асимптотикой в виде сходящейся волны e^{-ikx} , мы бы получили решения вида $\varepsilon_n = E_n + i\Gamma_n/2$, то есть с неправильной причинностью.