

Задачи к семинару «Точно решаемые потенциалы. Часть 2»

13 октября 2018 года

Упражнения (35 баллов)

Упражнение 1. Функция Эйри (10 баллов)

1. Используя асимптотики функций Эйри для инфинитного движения (без бесконечной стенки), отнормируйте их на дельта-функцию от энергии, а также убедитесь в соотношении полноты. А именно, выпишите волновые функции, удовлетворяющие следующему условию:

$$\int dx \psi_E^*(x) \psi_{E'}(x) = \delta(E - E') \quad (1)$$

и убедитесь, что для них выполняется соотношение

$$\int dE \psi_E^*(x') \psi_E(x) = \delta(x - x') \quad (2)$$

Упражнение 2. Квантовый гармонический осциллятор (10 баллов)

1. Вычислите $\langle \hat{x}^4 \rangle$ по произвольному собственному состоянию гармонического осциллятора $|n\rangle$.
2. Частица находилась в основном состоянии гармонического осциллятора с частотой ω . Пусть в какой-то момент времени характерная частота осциллятора мгновенно меняется и становится равной ω' . Вычислите вероятность остаться в основном состоянии.

Упражнение 3. Когерентные состояния (15 баллов)

Когерентные состояния гармонического осциллятора определяются как собственные состояния для понижающего оператора $\hat{a}$, с собственным комплексным числом $\alpha \in \mathbb{C}$: $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$.

1. Выразите когерентное состояние $|\alpha\rangle$ явно через собственные состояния осциллятора, нормировав его условием $\langle 0|\alpha\rangle = 1$.
2. Представьте их в виде $|\alpha\rangle = \hat{C}(\alpha)|0\rangle$; найдите явный вид оператора $\hat{C}(\alpha)$.
3. Вычислите перекрытие когерентных состояний $\langle \alpha|\alpha'\rangle$.
4. Когерентные состояния образуют *переполненный базис*. Докажите следующую формулу для «разложения единицы»:

$$\hat{\mathbb{I}} = \int \frac{d\alpha d\alpha^*}{\pi} \cdot e^{-|\alpha|^2} |\alpha\rangle \langle \alpha| \quad (3)$$

(мы определили $d\alpha d\alpha^* \equiv d(\text{Re}\alpha)d(\text{Im}\alpha)$).

Задачи (65 баллов)

Задача 1. Теорема Вика (20 баллов)

Квантовый гармонический осциллятор находится при температуре T , то есть описывается матрицей плотности $\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \omega \hat{a}^\dagger \hat{a}}$. Вычислите среднее значение по этому состоянию от оператора $\langle e^{\alpha_1 \hat{a} + \alpha_2 \hat{a}^\dagger} \rangle$ и докажите следующее соотношение:

$$\langle e^{\alpha_1 \hat{a} + \alpha_2 \hat{a}^\dagger} \rangle = e^{\frac{1}{2} \langle (\alpha_1 \hat{a} + \alpha_2 \hat{a}^\dagger)^2 \rangle} \quad (4)$$

Указание: вам может пригодиться базис когерентных состояний, а также формула Бейкера-Кэмбелла-Хаусдорфа:

$$e^{\hat{A} + \hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}]}, \quad \text{if } [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0 \quad (5)$$

Задача 2. QHO in a box (20 баллов)

Квантовый гармонический осциллятор помещён в большую «коробку» размера $2L$ ровно посередине, так что потенциальная энергия имеет следующий вид:

$$U(x) = \begin{cases} \frac{m\omega^2 x^2}{2}, & |x| < L \\ \infty, & |x| > L \end{cases} \quad (6)$$

Определите *силу*, с которой осциллятор, находясь в одном из низколежащих уровней энергии $n \ll \frac{L^2}{\hbar/m\omega}$, действует на эти стенки.

Указание: силу можно определить из условия $F = -\frac{\partial E_n(L)}{\partial L}$.

Задача 3. Hydrogen atom in 2D (25 баллов)

Определите уровни энергии и кратности их вырождения, а также стационарные волновые функции для двумерной частицы, движущейся в притягивающем потенциале $U(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{r}$. Указание: задача приводится к вырожденной гипергеометрической функции ${}_1F_1$.