Задачи к семинару «Адиабатическое приближение в нестационарных задачах. Фаза Берри»

3 ноября 2018 года

Упражнения (10 баллов)

Упражнение 1. Ионизация (5 баллов)

Имеется двухъямный потенциал $U(x) = -\frac{\kappa}{m}\left[\delta\left(x + \frac{L(t)}{2}\right) + \delta\left(x - \frac{L(t)}{2}\right)\right]$. В начальный момент времени ямы разнесены друг от друга бесконечно далеко, $L \to \infty$, и электрон находится в одной из ям. Расстояние между ямами затем медленно уменьшается до нуля, так что в какой-то момент времени две ямы сливаются в одну: $U(x) = -\frac{2\kappa}{m}\delta(x)$. Определите, с какой вероятностью электрон останется в яме в результате такого процесса.

Упражнение 2. Дышите глубже (5 баллов)

Частица массы m движется в бесконечно глубокой потенциальной яме ширины $a(t)$, которая меняется во времени согласно следующему закону:

$$a(t) = a(1 - \alpha \sin^2 \omega t), \quad \alpha < 1. \tag{1}$$

При каких условиях в такой задаче следует ожидать применимость адиабатического приближения?

Задачи (90 баллов)

Задача 1. Переворот спина (20 баллов)

Спин-1/2 находится в магнитном поле $\boldsymbol{B}$, которое медленно вращается в плоскости yz:

$$\hat{H} = -\mu \boldsymbol{B} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \boldsymbol{B}(t) = B \cdot \left(0, \frac{1}{\cosh \omega t}, -\tanh \omega t\right), \tag{2}$$

и $\omega \ll \mu B$. В начальный момент времени $t \to -\infty$ спин и магнитное поле направлены по оси z. Найдите в первом неисчезающем порядке вероятность того, что спин останется направленным по оси z после завершения вращения при $t \to \infty$.

Задача 2. Эффект Ааронова-Бома (35 баллов)

Электрон может двигаться по кольцу радиуса R, и находится в связанном состоянии потенциальной ямы $U(\varphi) = -U_0\delta(\varphi - \varphi_0)$. Через кольцо пропускают магнитный поток Φ, так что гамильтониан системы имеет вид:

$$\hat{H} = \frac{(\hat{p}_\varphi - \frac{e}{c}A_\varphi)^2}{2m} - U_0\delta(\varphi - \varphi_0), \quad \hat{p}_\varphi = -\frac{i}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi R} \tag{3}$$

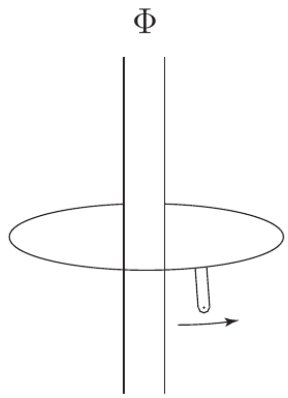

Рис. 1: Иллюстрация к задаче 2

Яму адиабатически медленно обводят вокруг кольца по часовой стрелке — величина φ_0 меняется от $\varphi_0(0) = 0$ до $\varphi_0(T) = 2\pi$. Определите зависимость фазы, которую получит волновая функция электрона в результате такой эволюции, от энергии в режиме, когда размер связанного состояния много меньше радиуса кольца.

Задача 3. Вот это поворот! (35 баллов)

Рассмотрим квадратный двумерный ящик размера $L \times L$ с бесконечными стенками. Произвольное стационарное состояние можно характеризовать двумя квантовыми числами $|n_x, n_y\rangle$, которые нумеруют количество узлов x и y компонент волновой функции; в частности, состояния $|1,0\rangle$ и $|0,1\rangle$ имеют одинаковую энергию. Пусть в начальный момент времени волновая функция представляла собой их произвольную линейную комбинацию:

$$|\psi(0)\rangle = \psi_1\,|1,0\rangle + \psi_2\,|0,1\rangle \tag{4}$$

Затем ящик адиабатически медленно поворачивается в плоскости на угол 2π по часовой стрелке, так что после поворота его новое положение совпадает с исходным. Определите волновую функцию $|\psi(T)\rangle$ после такого поворота.