Семинар 9. Адиабатическое приближение в нестационарных задачах. Фаза Берри

3 ноября 2018 года

Постановка задачи

Пусть гамильтониан системы **адиабатически** — очень медленно — меняется во времени, $\hat{H} = \hat{H}(t)$. Мы будем интересоваться тем, как устроено решение нестационарного уравнения Шрёдингера:

$$i\frac{d}{dt}\left|\psi(t)\right\rangle = \hat{H}(t)\left|\psi(t)\right\rangle \tag{1}$$

В принципе адиабатичность изменения параметров подразумевает предельный случай — параметры меняются бесконечно медленно. Естественно, в реальных задачах бесконечно медленно параметры менять невозможно, и поэтому всегда имеется некий характерный масштаб времени T, определяющий скорость изменения параметров, и адиабатичность означает, что этот масштаб времени — большой. Но с чем его нужно сравнивать? Для этого предлагается привлечь интуицию, приходящую от нестационарной теории возмущений. Если имеется возмущение, которое зависит от времени периодически, то имеются переходы между состояниями, причём состояния разнесены по энергии на ω — частоту этого возмущения. Всякое непериодическое возмущение, в свою очередь, можно расписать в интеграл Фурье и представить как комбинацию периодических; в нашем случае, характерные частоты преобразования Фурье определяются из соотношения неопределённостей, $\omega \sim \frac{1}{T}$ (тем самым, частоты очень маленькие). Теперь можно более чётко сформулировать критерий адиабатичности — а именно, частоты должно быть недостаточно для обеспечения переходов, $\boxed{\omega \ll \Delta E \Rightarrow T \gg \dfrac{1}{\Delta E}}$, где ΔE — типичное расстояние между соседними уровнями энергии системы, level spacing. Уровни энергии в случае гамильтониана, зависящего от времени — понятие бессмысленное, но если мы имеем дело с адиабатикой, то подразумеваются мгновенные уровни энергии гамильтониана — диагонализация гамильтониана в каждый конкретный момент времени:

$$\hat{H}(t)\left|\psi_n(t)\right\rangle = E_n(t)\left|\psi_n(t)\right\rangle. \tag{2}$$

Ещё раз подчеркнём, что $\left|\psi_n(t)\right\rangle$ ни в коем случае не являются решениями нестационарного уравнения Шрёдингера!

Пусть теперь в начальный момент времени $t = 0$ мы «посадили» частицу в одно из собственных состояний гамильтониана $\left|\psi(0)\right\rangle = \left|\psi_n(0)\right\rangle$. Вышеприведённые рассуждения позволяют нам заключить, что в адиабатическом пределе $T \to \infty$, состояние системы в произвольный момент времени t будет $\left|\psi(t)\right\rangle \propto \left|\psi_n(t)\right\rangle$ (с точностью до фазового множителя) — то есть волновая функция будет следовать мгновенному состоянию данного гамильтониана. Это утверждение носит название **адиабатической теоремы**. Когда мы будем изучать квазиклассическое приближение, мы также покажем, что это утверждение напрямую связано с сохранением адиабатического инварианта в классической механике.

Адиабатический анзац

Подкрепим рассуждения, приведённые выше, конкретным вычислением, а также построим систематическое адиабатическое разложение по малому параметру. Поскольку мгновенные собственные состояния гамильтониана образуют базис, то предлагается искать волновую функцию в виде разложения по этому базису, подставив разложение $\left|\psi(t)\right\rangle = \sum_n \psi_n(t)\left|\psi_n(t)\right\rangle$ в нестационарное уравнение Шрёдингера:

$$i\sum_n\left(\frac{d\psi_n}{dt}\left|\psi_n(t)\right\rangle + \psi_n(t)\left|\frac{\partial\psi_n(t)}{\partial t}\right\rangle\right) = \sum_n E_n(t)\psi_n(t)\left|\psi_n(t)\right\rangle \tag{3}$$

Если бы гамильтониан не зависел от времени, то есть $E_n = \text{const}$ и $\left|\psi_n\right\rangle = \text{const}$, то коэффициенты испытывали бы «быструю», но тривиальную эволюцию во времени: $\psi_n(t) = e^{-iE_nt}$. В зависящем от времени случая предлагается эту быструю зависимость выделить явно, чтобы получить уравнение, содержащее только медленно меняющиеся во времени величины[1].

[1] В каком-то смысле, это аналогично представлению взаимодействия в нестационарной теории возмущений

Подстановка, которая это реализует, следующая: $\psi_n(t) = c_n(t) \cdot \exp\left(-i\int_0^t E_n(\tau)d\tau\right)$ — написанная тут фаза носит название **динамической фазы**. Несложно видеть, что такая подстановка сокращает правую («быструю») часть уравнения. Проецируя теперь всё уравнение на бра-вектор $\langle\psi_n(t)|$, и пользуясь ортонормированностью мгновенного базиса[2]:

$$\boxed{i\frac{dc_n(t)}{dt} = -i\sum_m c_m(t)e^{-i\int_0^t \omega_{mn}(\tau)d\tau}\left\langle \psi_n(t)|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial t}\right\rangle} \tag{4}$$

где введено стандартное обозначение $\omega_{nm} = E_n - E_m$. Правая часть уравнения мала; она содержит производные по времени мгновенного базиса, который меняется на больших временных масштабах $t \sim T$; поэтому это уравнение уже приспособлено для решения его методом последовательных приближений.

Переходы на другие состояния. Задача Ландау-Зенера

Возвращаясь к исходной постановке задачи, мы будем решать задачу следующую. Пусть в начальный момент времени мы находились в каком-то состоянии n, то есть $c_n(0) = 1$ и $c_{m\neq n}(0) = 0$. Сейчас мы будем интересоваться амплитудой перехода в другое состояние за конечное время $c_{m\neq n}(t)$. Сперва приведём наивную оценку, которая продемонстрирует явно, что эта величина мала в меру адиабатичности, а затем вычислим её для конкретной модели.

Оценка

Для оценки правой части уравнения (4) имеющийся «матричный элемент»[3] можно выразить, продифференцировав по времени уравнение (2), и спроецировав его на бра-вектор $\langle\psi_m(t)|$. Воспользовавшись затем соотношением ортогональности, и самим стационарным УШ, мы получаем:

$$\langle\psi_m(t)|\,\frac{\partial\hat{H}}{\partial t}\,|\psi_n(t)\rangle = \frac{\partial E_n}{\partial t}\delta_{nm} + \omega_{nm}(t)\left\langle\psi_m(t)|\frac{\partial\psi_n(t)}{\partial t}\right\rangle \Rightarrow \boxed{\left\langle\psi_m(t)|\frac{\partial\psi_n(t)}{\partial t}\right\rangle = \frac{\langle\psi_m(t)|\,\frac{\partial\hat{H}}{\partial t}\,|\psi_n(t)\rangle}{\omega_{nm}(t)}, \quad m\neq n} \tag{5}$$

Производная гамильтониана уже явно содержит параметр $1/T$, а в знаменателе оказался level spacing ω_{nm} — поэтому правая часть уравнения (4) действительно мала по параметру $\omega_{nm}T \gg 1$.

Задача Ландау-Зенера

Поскольку параметр адиабатичности явно содержит level spacing, который, вообще говоря, зависит от времени — то мы заключаем, что больше всего переходы между различными состояниями будут происходить, когда какая-то пара уровней максимально сближаются; и переходы при этом будут происходить именно между этой парой уровней. Поэтому такую ситуацию можно сформулировать в достаточно общем виде как чисто двухуровневую задачу. Такая задача носит название задачи Ландау-Зенера, и описывается следующим гамильтонианом:

$$\hat{H}(t) = \begin{pmatrix}\alpha t & \gamma \\ \gamma & -\alpha t\end{pmatrix} \tag{6}$$

Следуя логике адиабатического приближения, сперва требуется найти мгновенные собственные состояния такого гамильтониана. Они выражаются следующим образом:

$$E_+(t) = \sqrt{\gamma^2 + (\alpha t)^2}, \quad |\psi_+(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(\gamma^2 + (\alpha t)^2 + \alpha t\sqrt{\gamma^2+(\alpha t)^2})}}\begin{pmatrix}\alpha t + \sqrt{\gamma^2+(\alpha t)^2} \\ \gamma\end{pmatrix} \tag{7}$$

$$E_-(t) = -\sqrt{\gamma^2 + (\alpha t)^2}, \quad |\psi_-(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(\gamma^2 + (\alpha t)^2 - \alpha t\sqrt{\gamma^2+(\alpha t)^2})}}\begin{pmatrix}\alpha t - \sqrt{\gamma^2+(\alpha t)^2} \\ \gamma\end{pmatrix} \tag{8}$$

[2]Тут мы неявно предполагаем, что спектр невырожден. Случай вырожденного спектра не несёт в себе больших сложностей.

[3]Строго говоря, это не матричный элемент, поскольку «оператор» $\frac{\partial}{\partial t}$ не является оператором, действующим на гильбертовом пространстве волновых функций.

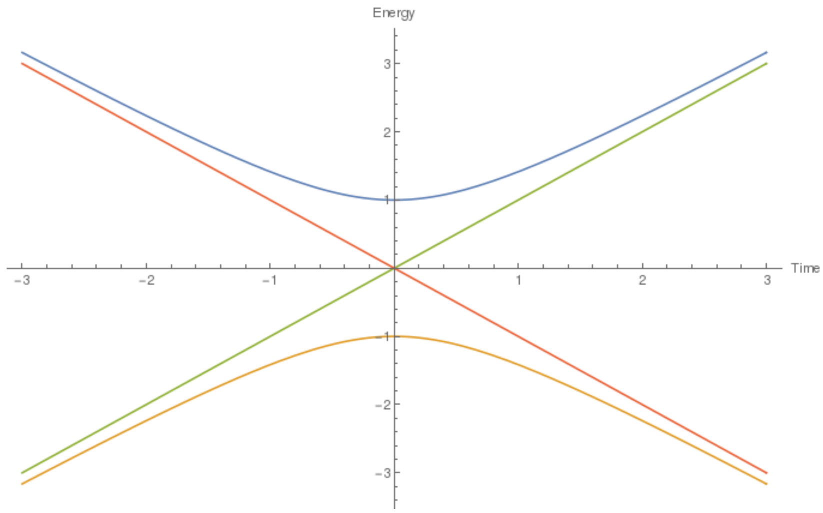


Рис. 1: Мгновенные уровни энергии гамильтониана Ландау-Зенера как функция времени. Прямые — асимптотика при $\alpha t \gg \gamma$

Для конкретно этой задачи, чтобы по максимуму избавиться от корней, удобно использовать параметризацию через гиперболический параметр $\alpha t = \gamma \sinh \theta$. В таком случае, эти выражения слегка упрощаются:

$$E_+(\theta) = \gamma \cosh \theta, \quad |\psi_+(\theta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\cosh\theta}} \begin{pmatrix} e^{\theta/2} \\ e^{-\theta/2} \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$E_-(\theta) = -\gamma \cosh \theta, \quad |\psi_-(\theta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\cosh\theta}} \begin{pmatrix} e^{-\theta/2} \\ -e^{\theta/2} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Пусть в момент времени $t \to -\infty$ мы находились на верхней ветке, то есть $|\psi_+(-\infty)| = 1$ и $|\psi_-(-\infty)| = 0$; и мы интересуемся вероятностью перехода в результате адиабатической эволюции на нижнюю ветку $P = |\psi_-(+\infty)|^2$. Сразу выделим параметр адиабатичности. Если уровни находятся достаточно далеко по энергии, то переходов не будет — поэтому масштаб времени T, который входит в критерий адиабатичности, определяется из условия достаточной близости уровней: $\alpha T \sim \gamma \Rightarrow T \sim \frac{\gamma}{\alpha}$. С другой стороны, масштаб расстояния между уровнями при этом равен γ. Поэтому адиабатическое приближение соответствует случаю, когда $\gamma^2 \gg \alpha$.

Решая уравнение (4) методом последовательных приближений, и в качестве нулевого приближения беря $c_+^{(0)}(t) = 1 = \text{const}$ и $c_-^{(0)}(t) = 0$, в первом приближении мы получаем следующее уравнение на $c_-^{(1)}(t)$, которое, в свою очередь, тривиально интегрируется; наконец, в интеграле удобно перейти опять вместо интегрирования по времени к интегрированию по вспомогательному параметру θ:

$$i\frac{dc_-(t)}{dt} = -ie^{-i\int_0^t \omega_{+-}(\tau)d\tau} \frac{\langle\psi_-(\theta)| \frac{\partial \hat{H}}{\partial \theta} |\psi_+(\theta)\rangle}{\omega_{-+}(\theta)} \cdot \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow c_-^{(1)}(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \cdot e^{-i\int_0^t \omega_{+-}(\tau)d\tau} \frac{\langle\psi_-(\theta)| \frac{\partial \hat{H}}{\partial \theta} |\psi_+(\theta)\rangle}{2\gamma\cosh\theta} \tag{11}$$

Входящие сюда искомые величины равны:

$$\langle\psi_-(\theta)| \frac{\partial \hat{H}}{\partial \theta} |\psi_+(\theta)\rangle = \frac{1}{2\cosh\theta} \begin{pmatrix} e^{-\theta/2} & -e^{\theta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma\cosh\theta & 0 \\ 0 & -\gamma\cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\theta/2} \\ e^{-\theta/2} \end{pmatrix} = \gamma \tag{12}$$

$$\int_0^t \omega_{+-}(\tau)d\tau = 2\frac{\gamma^2}{\alpha}\int_0^\theta \cosh^2\theta d\theta = \frac{\gamma^2}{\alpha}\left[\theta + \frac{1}{2}\sinh 2\theta\right], \tag{13}$$

и искомая амплитуда даётся интегралом:

$$c_-^{(1)}(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-i\frac{\gamma^2}{\alpha}(\theta + \frac{1}{2}\sinh 2\theta)\right)}{2\cosh\theta} d\theta \tag{14}$$

Перед нами — классический пример интеграла вида «быстро-осциллирующая функция+медленная огибающая». Интегралы такого вида берутся методом стационарной фазы, или более общо — методом перевала[4]. В данном конкретном случае, фаза $f(\theta) = \theta + \frac{1}{2}\sinh 2\theta$ и $f'(\theta) = 1 + \cosh 2\theta \geq 2$, поэтому точек стационарной фазы на вещественной

[4]Точная асимптотическая оценка величины стоящего тут интеграла (включающая в себя предэкспоненту) с помощью метода перевала — забавное математическое упражнение, и связано это с двумя фактами. Первый заключается в том, что перевальная точка $\theta_0 = -i\frac{\pi}{2}$ совпадает с полюсом подынтегральной функции. Второй — разложение в окрестности перевала начинается не с квадратичного члена вида $\frac{1}{2}f''(\theta_0)(\theta-\theta_0)^2$ — который, как несложно заметить, тоже зануляется — а с кубического, $\frac{1}{6}f^{(3)}(\theta_0)(\theta-\theta_0)^3$.

оси нет. Тут мы не будем гоняться за точностью оценки, а выделим лишь ведущую экспоненциальную асимптотику интеграла. Для этого мы можем сделать так, чтобы в экспоненте стояла линейная функция, перейдя к интегралу по $z = \theta + \frac{1}{2}\sinh 2\theta \Rightarrow dz = d\theta(1+\cos 2\theta) = 2\cosh^2\theta d\theta$, и переписав интеграл в виде:

$$c_-^{(1)}(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-i\frac{\gamma^2}{\alpha}z\right)}{4\cosh^3\theta} dz \tag{15}$$

Теперь мы можем применить лемму Жордана, замкнув контур интегрирования в нижней полуплоскости (где экспонента затухает), и сведя его к вычетам в полюсах, которые определяются из уравнения $\cosh\theta = 0 \Rightarrow \theta_k = -i\frac{\pi}{2}(1+2k) = z_k$. Беря только полюс с $k = 0$, и оставляя только экспоненту, мы получаем ответ:

$$c_-^{(1)}(\infty) \sim e^{-\pi\gamma^2/2\alpha} \Rightarrow \boxed{P \sim e^{-\pi\gamma^2/\alpha}} \tag{16}$$

Обсудим теперь полученный ответ.

- Во-первых, ответ получился экспоненциально мал — что и обосновывает адиабатическое приближение. Действительно, переходы в другие состояния практически отсутствуют! Это — утверждение весьма общего характера — глядя на уравнение (4), мы понимаем, что поправка всегда будет устроена как быстро-осциллирующая функция (связанная с динамической фазой) + медленная огибающая (связанная с медленной зависимостью мгновенных стационарных волновых функций), а интегралы такого вида, как правило, действительно содержат экспоненциальную малость.

- Во-вторых, следует сделать комментарий по поводу того, почему мы не стали оценивать предэкспоненту. Дело в том, что если сделать вторую итерацию адиабатического приближения, то поправка окажется малой с той же экспонентой и не будет содержать малости по сравнению с первой. Это — достаточнчо неприятная ситуация, и в данном случае означает, что адиабатическое приближение позволяет правильно определить показатель экспоненты, но предэкспонента находится за пределами её точности.

- В-третьих, показатель экспоненты в более или менее общем виде можно определить, используя метод перевала. Действительно, для этого достаточно определить комплексную точку перевала, условие на которую, в действительности, очень просто: $\omega_{mn}(t_0) = 0$ (в нашем случае это соответствует $t = -i\frac{\gamma}{\alpha}$), и тогда вероятность перехода дастся интегралом[5]

  $$\boxed{P \sim \exp\left(-2\mathrm{Im}\int^{t_0} \omega_{mn}(t)dt\right)} \tag{17}$$

  Более того, точно такое же выражение возникает при изучении вопроса о сохранении адиабатического инварианта в классической механике, что подчёркивает сходство этих двух задач.

- Наконец, задача Ландау-Зенера решается абсолютно точно и без адиабатического приближения[6], и ответ в ней оказывается точно равен этой экспоненте: $P = e^{-\pi\gamma^2/\alpha}$.

Эволюция исходного состояния. Фаза Берри

Мы исследовали вопрос переходов под влиянием адиабатического изменения параметров гамильтониана в другие состояния — эволюцию коэффициентов $c_{m\neq n}$ и выяснили, что такие переходы экспоненциально редки. Теперь перейдём к обсуждению эволюции самого коэффициента c_n. При этом достаточно очевидно, в силу сохранения нормировки, и пренебрегая этими самыми переходами, что ничего кроме «накручивания» фазы с коэффициентом происходить не может.

Итак, уравнение 4 с $m = n$ записывается и тривиально интегрируется:

$$\frac{dc_n(t)}{dt} = ic_n(t)\left\langle\psi_n(t)\right| i\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi_n(t)\right\rangle \Rightarrow c_n(t) = c_n(0)\exp\left(i\gamma_n(t)\right), \quad \gamma_n(t) \equiv \int dt\cdot i\left\langle\psi_n(t)\middle|\frac{\partial\psi_n(t)}{\partial t}\right\rangle \tag{18}$$

Величина $\gamma(t)$ носит название **фазы Берри**. Исследуем полученный объект.

Во-первых, стоит убедиться, что это действительно фаза — а именно, что эта величина вещественная. Сделать это просто, дифференцируя условие нормировки мгновенных стационарных состояний:

Оценку интеграла любопытному читателю предлагается проделать самому. Правильный ответ такой: $I(z) \approx \left[\frac{\pi}{3} + \frac{\Gamma(2/3)}{2^{8/3}3^{5/6}z^{2/3}}\right]e^{-\pi z/2}$ (где $z = \gamma^2/\alpha \gg 1$). Любопытно, что получаемая таким образом константа в предэкспоненте для перехода Ландау-Зенера $\frac{\pi^2}{9} \approx 1.096$, слабо отличается от правильного ответа — единицы.

[5] Двойка тут возникла от возведения амплитуды в квадрат, а мнимая часть — от взятия модуля амплитуды. Начальная точка интегрирования должна находиться в произвольной точке вещественной оси. Подробнее об этом можно прочитать в 3 томе, §53 «Переходы под влиянием адиабатических возмущений».

[6] Что требует, конечно, некоторой возни со спецфункциями — в данной задаче решение выражается через функции параболического цилиндра D_ν

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\left\langle \psi_n(t)|\psi_n(t)\right\rangle = \left\langle \frac{\partial \psi_n}{\partial t}|\psi_n\right\rangle + \left\langle \psi_n|\frac{\partial \psi_n}{\partial t}\right\rangle = 2\mathrm{Re}\left\langle \frac{\partial \psi_n}{\partial t}|\psi_n\right\rangle \tag{19}$$

из чего мы заключаем, что $\left\langle \psi_n(t)|\frac{\partial \psi_n(t)}{\partial t}\right\rangle$, а значит и γ_n — величина чисто вещественная.

Во-вторых, мы можем рассмотреть случай, когда гамильтониан зависит не явно от времени, но зависит от какого-то конечного набора параметров R_i: $\hat{H} = \hat{H}(\boldsymbol{R})$, которые, в свою очередь, как-то меняются со временем — описывают некоторую траекторию $\boldsymbol{R}(t)$ в пространстве параметров. В свою очередь, мгновенные состояния гамильтониана тоже являются функциями этих параметров $|\psi_n\rangle = |\psi_n(\boldsymbol{R})\rangle$. Тогда выражение для фазы Берри можно переписать:

$$\gamma_n = \int dt \cdot i \left\langle \psi_n(\boldsymbol{R})|\nabla_{\boldsymbol{R}}\psi_n(\boldsymbol{R})\right\rangle \cdot \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t} = \int \boldsymbol{A}_n(\boldsymbol{R})d\boldsymbol{R}, \quad \boldsymbol{A}_n(\boldsymbol{R}) = i\left\langle \psi_n(\boldsymbol{R})|\nabla_{\boldsymbol{R}}\psi_n(\boldsymbol{R})\right\rangle \tag{20}$$

Это — криволинейный интеграл. Величина $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})$ носит название **связности Берри** и является вектором, живущем в том-же пространстве параметров. В такой записи видно следующее немаловажное свойство: фаза Берри не зависит от того, *как именно* мы меняем параметры $\boldsymbol{R}(t)$ (лишь бы это было адиабатически) — но зависит только от *вида самой траектории* в пространстве параметров. Из-за этого фундаментального свойства фазу Берри называют также **геометрической фазой**.

В-третьих, связность и фаза Берри не являются калибровочно-инвариантными величинами. Априори выбор фазы собственных состояний $|\psi_n(\boldsymbol{R})\rangle$ произволен — мы лишь требуем, чтобы оно было собственным для гамильтониана $\hat{H}(\boldsymbol{R})$. Вместо набора состояний можно выбрать любой другой — $\left|\widetilde{\psi}_n(\boldsymbol{R})\right\rangle = e^{i\chi(\boldsymbol{R})}\left|\psi_n(\boldsymbol{R})\right\rangle$ (это называется калибровочным преобразованием); формулы для связности и фазы изменятся:

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_n(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{A}_n(\boldsymbol{R}) - \nabla\chi, \quad \widetilde{\gamma}_n = \gamma_n - \chi(\boldsymbol{R}_f) + \chi(\boldsymbol{R}_i) \tag{21}$$

(где $\boldsymbol{R}_f$ и $\boldsymbol{R}_i$ — конечные и начальные точки траектории, по которым мы изменяем наши параметры). Однако, есть важный случай циклических траекторий $\boldsymbol{R}_f = \boldsymbol{R}_i$ — тогда фаза Берри является калибровочно инвариантной, и, вообще говоря, физически измеримой величиной. Именно для циклических траекторий $\boldsymbol{R}(t)$ имеет смысл говорить о фазе Берри.

Спин в магнитном поле

Классическая задача, на примере которой можно продемонстрировать концепцию фазы Берри — это задача о движении спина-$\frac{1}{2}$ в магнитном поле, которое медленно меняется во времени. Гамильтониан системы имеет следующий вид:

$$\hat{H}(\boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{B}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}} \tag{22}$$

(где $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$ — матрицы Паули). Основное состояние системы соответствует спину, поляризованному вдоль поля. Если теперь поле заставить пройти замкнутый цикл (при этом наш спин адиабатически будет следить за полем, в силу адиабатической теоремы), то в конце мы получим исходное состояние. Изучим, как устроена фаза Берри для данной задачи.

Изучать её мы будем в сферических координатах: $\boldsymbol{B} = (B\sin\theta\cos\varphi, B\sin\theta\sin\varphi, B\cos\theta)$. Сперва нам требуется найти мгновенные собственные состояния гамильтониана:

$$\hat{H} = -B\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi}\\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta\end{pmatrix}, \quad \begin{cases} E_+ = +B, \quad |\psi_+\rangle = \begin{pmatrix}-\sin\frac{\theta}{2}\\ e^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix},\\ E_- = -B, \quad |\psi_-\rangle = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}.\end{cases} \tag{23}$$

Ключевых параметра тут 2 — углы θ и φ (имеются в виду параметры, задающие вектор $\boldsymbol{R}$; изменение длины B, как мы видим, на волновые функции не влияет никак). Поэтому у связности Берри будет две компоненты:

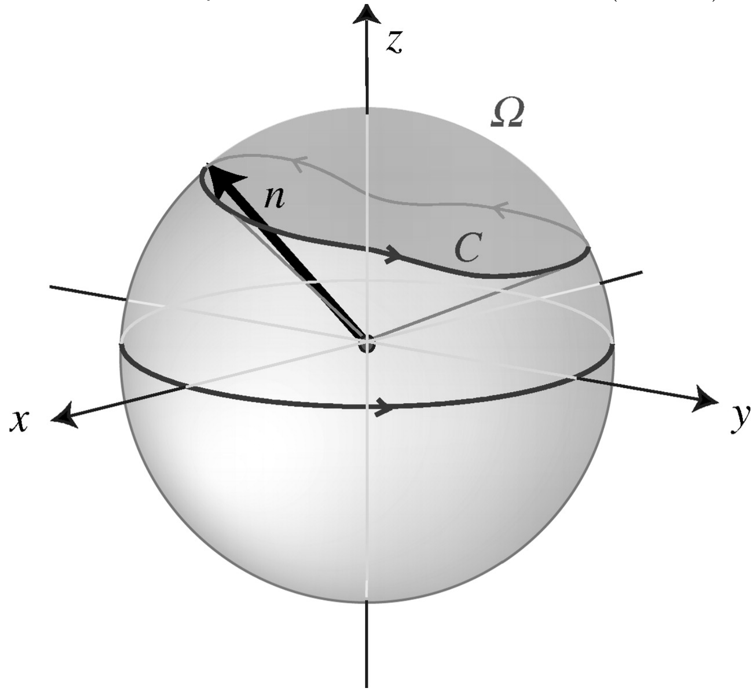
$$A_\theta^{(-)} = i\left\langle \psi_-|\frac{\partial \psi_-}{\partial\theta}\right\rangle = 0, \quad A_\varphi^{(-)} = i\left\langle \psi_-|\frac{\partial \psi_-}{\partial\varphi}\right\rangle = -\sin^2\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2}(1-\cos\theta) \tag{24}$$

и поэтому для любой замкнутой эволюции фаза Берри будет иметь вид:

$$\boxed{\gamma_- = -\frac{1}{2}\oint(1-\cos\theta)d\varphi = -\frac{1}{2}\Omega} \tag{25}$$

В действительности же, этот интеграл в точности равен телесному углу, который заметает замкнутая траектория на единичной сфере. Проще всего это продемонстрировать в простом случае $\theta = \mathrm{const} \Rightarrow \gamma = -\pi(1-\cos\theta)$; в то время как телесный угол равен $2\pi(1-\cos\theta)$. Это — демонстрация того факта, что фаза Берри является геометрической фазой, в данной задаче она определяется чисто геометрической характеристикой траектории. Сделаем ещё несколько замечаний:

Рис. 2: Замкнутая эволюция магнитного поля (и спина)



- Телесный угол ориентирован — если изменить направление обхода контура, то поменяется и знак Ω.

- Можно выбрать как телесный угол «внутри» контура Ω, так и телесный угол «вне» контура, $4\pi - (-\Omega)$ — при этом знак Ω поменяется из-за неправильного направления обхода. Очевидно, что полученные фазы Берри отличаются на 2π — что не является большой проблемой, ведь это фаза.

- Этот результат достаточно просто обобщается на произвольный спин S (не $\frac{1}{2}$) и на состояние с произвольной проекцией $M \in [-S, S]$ на направление магнитного поля — ответ записывается как $\gamma_M = M\Omega$. Поскольку M бывает либо полуцелым, либо целым, то проблем с неоднозначностью фазы не возникает.

- Утверждение про калибровочную неинвариантность связаности Берри можно тут продемонстрировать явно. Действительно, можно выбрать волновую функцию, скажем, в чуть ином виде: $\left|\widetilde{\psi}_-\right\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi}\cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$. Это изменит и выражение для связности Берри, $\widetilde{A}_\varphi^{(-)} = \frac{1}{2}(1+\cos\theta)$. Однако выражение для интеграла от фазы *по замкнутому контуру* при этом не изменится (разумеется, по модулю 2π).

Наконец, отметим, что в современной физике конденсированного состояния к фазе Берри проявляется огромный интерес, связанный с её применениями при исследовании **топологических изоляторов**. В них фаза Берри играет ключевую роль, и именно в связи с ней эти вещества проявляются нетривиальные (топологические) свойства.