Задачи к семинару «Непрерывный спектр. Задача рассеяния»

Упражнения (25 баллов)

Упражнение 1 (10 баллов)

Отнормируйте на дельта-функцию от энергии состояния непрерывного спектра, инфинитные в обе стороны для случая «потенциальной ступеньки» — потенциала, имеющего различные асимптотики на бесконечностях $U(-\infty) = 0$, $U(+\infty) = U_0$. Для простоты, считайте $E > U_0 > 0$.

Упражнение 2 (15 баллов)

Рассмотрите движение одномерной частицы в поле мелкой ямы, $U(x) = -\frac{\kappa}{m}\delta(x)$. Покажите непосредственным вычислением полноту базиса собственных состояний гамильтониана. Рассмотрите как случай $\kappa > 0$ (когда в яме имеется связанное состояние), так и $\kappa < 0$.

Указание: при проверке условия полноты, $\delta(x-x') = \sum_n \psi_n^*(x)\psi_n(x')$, для простоты можете рассмотреть только случай $x, x' > 0$.

Задачи (75 баллов)

Задача 1. Эволюция волновой функции (25 баллов)

1. Частица находится в основном состоянии гармонического осциллятора $U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$. Потенциал выключают на время T, спустя которое его снова включают. Определите вероятность того, что частица окажется в *основном* состоянии.

2. Определите такую вероятность для потенциала $U(x) = -\frac{\kappa}{m}\delta(x)$, но для случаев малых и больших времён T.

Подсказка: для асимптотической оценки интеграла в пункте 2 для случая малых T вам может пригодиться[1] приём — преобразование Хаббарда-Стратановича (гауссов интеграл, заменяющий квадратичное по A выражение в экспоненте на линейное):

$$e^{-iA^2} = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{iz^2 - 2izA} \tag{1}$$

Задача 2. Квазистационарные состояния (50 баллов)

В этой задаче мы будем исследовать уравнение Шрёдингера в потенциале следующего вида:

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ \frac{\kappa}{m}\delta(x-a), & x > 0 \end{cases} \tag{2}$$

Рассеивающий потенциал (величину κ) мы будем предполагать сильным. Если заменить этот потенциал на бесконечную стенку, то в этой задаче имеется множество стационарных состояний вида $\psi_n(x) = \sin k_n x$, $k_n = \frac{\pi n}{a}$ и $E_n^{(0)} = \frac{k_n^2}{2m}$. Возможность туннелирования превращает эти состояния в *квазистационарные* — хоть и не стационарные, но долгоживущие, и на достаточно небольших промежутках времени их можно считать стационарными. Ниже будут изложены три различных точки зрения на такие состояния и показана их эквивалентность.

Указание: хоть дальше и идёт речь об энергетическом представлении — во всех промежуточных вычислениях удобнее пользоваться квантовым числом — импульсом $k = \sqrt{2mE}$.

[1] А может и не пригодиться, кто знает

Задача 2.1. Распад квазистационарного состояния (25 баллов) В начальный момент времени частица была «приготовлена» в одном из квазистационарных состояний, $\psi(x,t=0)=\psi_0(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin k_n x$.

1. Определите непрерывный спектр исходной задачи, нормированный на дельта-функцию от разницы энергий.
2. Рассмотрите разложение исходной волновой функции по этому непрерывному спектру. Обратите внимание, что $|\psi(E)|^2$ вблизи $E_n^{(0)}$ имеет максимум; покажите, что в окрестности этого максимума вероятность устроена как лоренциан:
$$|\psi(E)|^2 \approx c\frac{\Gamma_n}{(E-E_n)^2+\frac{\Gamma_n^2}{4}} \tag{3}$$
и при этом E_n близка к $E_n^{(0)}$, а $\Gamma_n \ll E_n$. Найдите величины c, E_n, Γ_n.
3. Найдите амплитуду того, что через достаточно большое время t частица останется в в этом квазистационарном состоянии $c(t)=\int\psi_0^*(x)\psi(x,t)dx$. Покажите, что на достаточно больших временах соответствующая вероятность $P(t)=|c(t)|^2$ затухает экспоненциально $P(t)\propto\exp(-t/\tau)$. Определите соответствующее «время жизни» τ_n.

Найденное «время жизни» окажется достаточно большим. Это означает, что на временах $t\ll\tau_n$, состояние $|n\rangle$ практически стационарно — волновая функция не меняется, за исключением тривиальной динамической фазы e^{-iE_nt}.

Задача 2.2. Задержка волнового пакета (20 баллов) Другой способ «смотреть» на квазистационарные состояния — это исследовать задачу рассеяния.

1. Определите волновые функции исходной задачи, которые соответствуют задаче рассеяния, то есть имеющие асимптотическое поведение $\psi(x\to\infty)=e^{-ikx}+re^{ikx}$. Величина коэффициента отражения $R=|r|^2$ тривиальным образом равна единице, поскольку движение инфинитно только в одну сторону; но вот амплитуда отражения $r(E)\equiv e^{2i\delta(E)}$ имеет нетривиальные свойства.
2. Покажите, что амплитуда r, как функция *комплексной* энергии ε имеет серию полюсов, близких к вещественной оси $\varepsilon_n=E_n-i\Gamma_n/2$. Покажите, что на вещественной оси в окрестности $E\approx E_n$ амплитуда устроена следующим образом:
$$r(E)\approx e^{i\phi}\cdot\frac{E-E_n-i\Gamma_n/2}{E-E_n+i\Gamma_n/2} \tag{4}$$
(с такими же величинами E_n и Γ_n; такой вид связан с условием $|r|^2=1$). Как при этом устроена фаза рассеяния $\delta(E)$?
3. Рассмотрите нестационарную задачу рассеяния: пусть на такую систему налетает волновой пакет, локализованный по энергии вблизи одного из таких метастабильных состояний, $E\approx E_n$. Определите время задержки такого волнового пакета $\tau=\partial\theta/\partial E$; и покажите, что непосредственно при резонансе $E=E_n$, время задержки связано с временем жизни метастабильного состояния. Обратите внимание — существенно, что полюса находятся в нижней комплексной полуплоскости; в противном случае мы бы получили $\tau(E_n)<0$, что очевидным образом противоречит причинности.

С этим эффектом связана иная физическая интерпретация квазистационарных состояний: при рассеянии на резонансе частица «попадает» в метастабильное состояние, где она «застревает» на достаточно продолжительное время, и лишь затем вылетает.

Задача 2.3. Комплексная энергия (5 баллов) Самым удобным способом поиска метастабильных состояний, однако, является следующий формальный трюк, рассматривая стационарное уравнение Шрёдингера для комплексных значений энергии E. Хоть, вообще говоря, такие состояния бессмысленны — они ненормируемы, нефизичны и не входят в базис. Тем не менее, наличие особых решений специального вида является признаком наличия в задаче квазистационарных состояний.

1. Покажите, что стационарное уравнение Шрёдингера $\left(\frac{\hat{p}^2}{2m}+U(x)\right)\psi(x)=\varepsilon\psi(x)$ для некоторых комплексных значений энергии ε_n имеет формальное решение, которое соответствует наличию только расходящейся волны $\psi(x\to+\infty)=e^{ikx}$, $\mathrm{Re}k>0$.
2. Покажите, что эти значения имеют вид $\varepsilon_n=E_n-i\Gamma_n/2$; и они в точности совпадают с полюсами амплитуды отражения, найденные в предыдущей задаче.
3. Заметьте, что если бы мы искали решения с асимптотикой в виде сходящейся волны e^{-ikx}, мы бы получили решения вида $\varepsilon_n=E_n+i\Gamma_n/2$, то есть с неправильной причинностью.