

## Задачи семинару «Математические дополнения»

### Задача 1. Параболический потенциал (40 баллов)

Определите вероятность отражения и прохождения частиц произвольной энергии  $E$  через потенциальный барьер  $U(x) = -\frac{m\omega^2 x^2}{2}$ .

*Указание:* эта задача очень похожа на задачу Ландау-Зенера.

### Задача 2. Явление Стокса для функции Эйри. (20 баллов)

Функция Эйри от комплексного аргумента может быть определена с помощью интегрального представления:

$$\text{Ai}(z) = \int_C \frac{dt}{i\pi} \exp\left(tz - \frac{t^3}{3}\right),$$

где контур  $C$  идет вдоль мнимой оси. С помощью метода комплексного перевала вычислите асимптотику для комплексных  $z = z_0 \exp(i\phi)$ ,  $z_0 \rightarrow +\infty$ . Везде, где это законно, оставляйте второй экспоненциально меньший член. Продемонстрируйте явление Стокса.

### Задача 3. Атом водорода (40 баллов)

Частица движется в потенциале ядра атома водорода  $U(r) = -\frac{e^2}{r}$  с нулевым орбитальным моментом  $L = 0$ . Деля стандартную подстановку  $\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{R(r)}{r}$ , рассмотрите уравнение на  $R(r)$  и решите его, используя метод Лапласа. Определите условие, при котором найденная волновая функция соответствует связанному состоянию, и найдите соответствующие уровни энергии  $E_n$ , а также асимптотику найденного решения на бесконечности (нормировочный множитель можно не находить).