

Задачи к семинарам «Туннельные эффекты. Надбарьерное отражение»

Задача 1. Интерференция в комплексной плоскости (40 баллов)

Найдите с экспоненциальной точностью в рамках квазиклассического приближения вероятность надбарьерного отражения частицы большой энергии E в потенциале $U(x) = -U_0 \frac{x^4}{a^4}$.

1. (5 баллов) Идентифицируйте квазиклассические точки остановки; нарисуйте (схематично) линии Стокса и анти-Стокса, соответствующие этой задаче.
2. (20 баллов) Выберите любую из интересующих нас линий анти-Стокса, вдоль которых необходимо исследовать решение. Определите условия сшивки амплитуд квазиклассических решений в окрестности необходимых точек остановки. Определите связь амплитуды прохождения и отражения в соответствующей задаче рассеяния.
3. (10 баллов) Вычислите необходимые квазиклассические интегралы, найдите ответ.

Задача 2. Туннельные эффекты (60 баллов)

Рассмотрите движение в потенциале $U(x) = U_0(x^2 - a^2)^2/a^4$.

1. (20 баллов) Определите расщепление высоколежащих уровней энергии $\sqrt{U_0 m a^2} \gg n \gg 1$ в этой задаче.
Указание: согласно общей формуле, действие необходимо вычислять между точками остановки, а не между минимумами потенциала. Поправки к действию логарифмические, и их необходимо вычислить с точностью до числа под логарифмом. Для этого предлагается: 1) продифференцировать нужный интеграл по энергии и 2) ввести промежуточный масштаб $a \gg \Lambda \gg a/(mU_0 a^2)^{1/4}$, и оценить интегралы в каждой из областей с необходимой точностью.
2. (20 баллов) Определите расщепление *основного состояния* в этой задаче. Насколько отличается ответ по сравнению с наивной формулой для $n \gg 1$, если в неё подставить $n = 1$?
Указание: в случае общего положения, это — сложная задача, поскольку для основного состояния найденные на семинаре условия сшивки неприменимы. Тем не менее, можно ожидать, что в окрестности каждой из ям волновая функция с хорошей точностью совпадает с осцилляторной $\psi \propto \exp(-m\omega x^2/2)$; это решение можно сшить с экспоненциально затухающим решением под барьером, где квазиклассическое приближение применимо. Разумеется, из-за расщепления, имеется также экспоненциально растущее решение, амплитуду при котором определить сложнее. Но вместо этого предлагается воспользоваться симметрией задачи по отношению к инверсии, а также трюком, изложенным в 3 томе, в задаче к §50 «Прохождение через потенциальный барьер».
3. (20 баллов) Повторите вычисления для распада метастабильных состояний в потенциале $U(x) = U_0 x^2(a - x)/a^3$.
Указание: придумайте трюк, аналогичный изложенному в 3 томе для предыдущего пункта, для задачи распада. Для этого предлагается воспользоваться унитарностью уравнения Шрёдингера (а именно, утверждением о том, что в обычной стационарной задаче ток $j(x) = \text{const}$).