

Точно решаемые потенциалы. Часть 1

Упражнения (40 баллов)

Упражнение 1 (20 баллов)

Исследуйте прямоугольную двумерную яму $U(\mathbf{r}) = -U_0\theta(a - |\mathbf{r}|)$ в обратном пределе глубокой ямы $U_0 \gg \frac{\hbar^2}{Ma^2}$. Оцените N_m — количество связанных состояний в яме для фиксированного орбитального квантового числа $m \in \mathbb{Z}$, а также полное число связанных состояний $N = \sum_m N_m$.

Определите промежуточную асимптотику уровней энергии $E_{n,m}$ (интересны высоколежащие уровни, но не близкие к «верху ямы»).

Упражнение 2 (20 баллов)

Определите волновую функцию для движения в трёхмерном Кулоновском потенциале¹ $U(\mathbf{r}) = -\alpha/r$ частицы с орбитальным квантовым числом L на строго нулевой энергии $E = 0$.

Указание: соответствующее уравнение сводится к уравнению Бесселя.

Задачи (60 баллов)

Задача 1. Шаровая полость² (20 баллов)

Рассмотрите трёхмерную частицу массы m , движущуюся в трёхмерной шаровой полости радиуса a с бесконечными стенками:

$$U(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & |\mathbf{r}| < a \\ \infty, & |\mathbf{r}| > a \end{cases} \quad (1)$$

Каким уравнением определяются уровни энергии с фиксированным орбитальным моментом L ? Решите уравнение точно для $L = 0$, а также приближённо для высоколежащих уровней энергии при $L \geq 1$.

Указание: свободное движение в трёхмерном пространстве также сводится к функциям Бесселя, но с полуцелым индексом $J_{n+1/2}(z)$ (которые, в действительности, спец.функциями не являются, а имеют явное представление через обычные тригонометрические функции).

Задача 2. Ступенька (40 баллов)

Определите коэффициенты прохождения и отражения от потенциала $U(x) = \frac{1}{2}U_0 \tanh \frac{x}{a}$. Указание: при помощи замены $\xi = -e^{-2x/a}$, задача приводится к гипергеометрической функции ${}_2F_1$.

¹Задача имеет двойную важность в квазиклассическом приближении. Во-первых, без этой задачи не получается правильная формула уровней энергии атома водорода $E_n = -Ry/n^2$, потому что в формуле Бора-Зоммерфельда неправильно определяются фазовые сдвиги, о чём будет задача. А во-вторых, уже в комплексном методе WKБ этот случай описывает сшивку, когда квазиклассическая точка остановки в комплексной плоскости находится близко к полюсу. Наконец, стоит отдельно отметить, что требование строго нулевой энергии физически отвечает тому, что мы нашли асимптотику волновых функций на *малых* энергиях, соответствующих не очень большим расстояниям.

²Такая модель описывает так называемые электронные пузыри в сверхтекучем гелии