

# Задачи к семинару «Нестационарная теория возмущений»

## Задача 1. Осцилляции Раби (20 баллов)

К атому водорода, находящемуся в основном состоянии, прикладывается переменное электрическое поле  $\hat{V} = -e\mathcal{E}\hat{z}\cos(\omega t)$  с частотой  $\omega = \frac{3}{4}Ry + \varepsilon$ , где «отстройка частоты» и характерная величина электрического поля  $e\mathcal{E}a$ ,  $\varepsilon \ll Ry$  (тут  $Ry = \frac{me^4}{2\hbar^2}$  — постоянная Ридберга, а  $a = \frac{1}{me^2}$  — Боровский радиус); в то же время, соотношение поля  $\mathcal{E}$  и отстройки частоты  $\varepsilon$ , вообще говоря, произвольно. Определите вероятность обнаружить частицу в основном и первом возбуждённом состояниях  $n = 1$  и  $n = 2$  через большое время  $T$ .

## Задача 2. Эффект Ландау-Зенера (15 баллов)

Рассмотрим произвольную двухуровневую систему, описываемую волновой функцией  $|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}$  и следующим гамильтонианом, зависящим от времени:

$$\hat{H}(t) = \begin{pmatrix} \alpha t & \gamma \\ \gamma & -\alpha t \end{pmatrix} \quad (1)$$

В начальный момент времени  $t \rightarrow -\infty$ , система находилась в первом состоянии (так что  $|\psi_1(t \rightarrow -\infty)|^2 = 1$ ) Определите вероятность перехода системы во второе состояние после такой эволюции  $|\psi_2(t \rightarrow +\infty)|^2$ , считая «скорость движения уровней» большой  $\alpha \gg \gamma^2$ .

## Задача 3. Осциллятор (15 баллов)

Рассмотрите электрон, движущийся в потенциале гармонического осциллятора. К системе приложено меняющееся со временем электрическое поле, так что Гамильтониан имеет вид:

$$\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2} + e\mathcal{E}(t)\hat{x}, \quad \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{-t^2/\tau^2} \quad (2)$$

При  $t \rightarrow -\infty$ , электрон находится в основном состоянии системы. Определите вероятность обнаружить его в произвольном  $n$ -том возбуждённом состоянии при  $t \rightarrow +\infty$  в ведущем порядке теории возмущений (считая поле слабым  $e^2\mathcal{E}^2 \ll m\omega^3$ ).

## Задача 4. Двухфотонная ионизация (50 баллов)

При помощи золотого правила Ферми на семинаре была вычислена интенсивность ионизации связанного состояния в одномерной дельта-яме  $U(x) = -\frac{\kappa}{m}\delta(x)$ . В задаче имелся порог ионизации — в частности, при  $\omega < E_0 = \frac{\kappa^2}{2m}$ , ответ был нулевым. Разумеется, причина этому — использование первого порядка теории возмущений («однофотонное приближение»); реальный ответ отличен от нуля на всех частотах. В данной задаче предлагается исследовать, как устроено обобщение золотого правила Ферми на примере этой же задачи при частотах  $\frac{E_0}{2} < \omega < E_0$ , где ведущий вклад дают именно двухфотонные процессы.

- (15 баллов)** Выведите поправку второго порядка теории возмущений для гармонического возмущения общего вида  $\hat{V}(t) = \hat{F}e^{-i\omega t} + \hat{F}^\dagger e^{i\omega t}$  (как и на семинаре) к произвольному коэффициенту  $a_f(t)$ , считая что изначально частица находилась в каком-то состоянии  $|\psi_i\rangle$  дискретного спектра. Структура ответа допускает следующую интерпретацию: переход происходит сперва виртуальным образом на некий промежуточный уровень  $i \rightarrow \nu$ , а затем — в конечное состояние  $\nu \rightarrow f$ . Учтите, что промежуточное состояние  $\nu$ , вообще говоря, относится к непрерывному спектру.
- (10 баллов)** Полученное выражение содержит достаточно много членов, имеющих различную интерпретацию — зависящие от времени части в пределе  $t \rightarrow \infty$  превратятся в дельта-функцию определённого вида. Учитывая отсутствие однофотонных процессов ( $\omega < E_0$ ), продемонстрируйте, что вклад в пределе  $t \rightarrow \infty$  будет лишь от одного члена. Исходя из этого, выпишите аналог золотого правила Ферми для этой задачи.
- (10 баллов)** Вычислите необходимые матричные элементы переходов из исходного состояния в промежуточное  $F_{i\nu}$  и из промежуточного в конечное  $F_{\nu f}$ . Поскольку как промежуточное, так и конечное состояния относятся к непрерывному спектру, то соответствующий интеграл, формально говоря, расходится. Для его определения воспользуйтесь, к примеру, экспоненциальной регуляризацией  $e^{-\alpha|x|}$ , рассматривая предел  $\alpha \rightarrow 0$ .

4. **(15 баллов)** Вычислите необходимый интеграл по промежуточным состояниям  $d\nu$ . Если использовать матричный элемент из предыдущего пункта при  $\alpha \equiv 0$ , соответствующий интеграл, вообще говоря, разойдётся, поскольку будет содержать полюс на вещественной оси. Однако сколь угодно маленькое  $\alpha \rightarrow 0$  сдвинет этот полюс в комплексную плоскость, благодаря чему интеграл оказывается возможным вычислить, используя теорему о вычетах. Наконец, используя выведенное во втором пункте обобщение золотого правила Ферми, выпишите, как устроена вероятность ионизации как функция частоты. Ответ выразите через частоту  $\omega$ , энергию связанного состояния в яме  $E_0$ , а также массу  $m$ , заряд  $e$  и амплитуду электрического поля  $\mathcal{E}$ . Постройте ответ численно.

*Указание:* поскольку вычислительно задача достаточно трудоёмкая, рекомендуется для промежуточных вычислений использовать какую-нибудь систему компьютерной алгебры (к примеру, Wolfram Mathematica).