

# Основы квантовой механики

## Упражнения (20 баллов)

### Упражнение 1. Унитарные матрицы (5 баллов)

Покажите, что унитарные матрицы, как и эрмитовы, диагонализуемы. *Указание:* покажите, что эрмитова и анти-эрмитова часть унитарного оператора диагонализуемы совместно.

### Упражнение 2. Замена базиса (5 баллов)

В квантовой механике замена базиса реализуется унитарными преобразованиями  $|\psi'\rangle = \hat{U}|\psi\rangle$ .

1. Покажите, что гамильтониан при этом заменяется на  $\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger$ .
2. Последнее утверждение необходимо модифицировать, если унитарное преобразование зависит явно от времени  $\hat{U} = \hat{U}(t)$ . Покажите, что в таком случае гамильтониан необходимо заменить на  $\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger - i\hbar\hat{U}\partial_t\hat{U}^\dagger$ .

### Упражнение 3. Матрицы Паули (10 баллов)

Покажите следующие свойства матриц Паули (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование):

1. Они, совместно с единичной матрицей  $\sigma^0 = \hat{\mathbb{I}}_{2\times 2}$ , представляют собой базис в пространстве эрмитовых матриц  $2 \times 2$ .
2. Они удовлетворяют следующими правилами перемножения:  $\hat{\sigma}^\alpha \hat{\sigma}^\beta = \delta_{\alpha\beta} \hat{\mathbb{I}} + i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\sigma}^\gamma$  ( $\alpha, \beta, \gamma \in \{x, y, z\}$ , а  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$  — символ Леви-Чевиты).
3. Они удобно экспоненцируются:  $\exp(in_{\alpha}\hat{\sigma}^{\alpha}) = \cos a + in_{\alpha}\hat{\sigma}^{\alpha} \sin a$  (тут  $\mathbf{n}$  — произвольный единичный вектор). *Указание:* разложите экспоненту в ряд; из-за простого правила произведения матриц Паули, произвольные степени от их линейных комбинаций вычисляются достаточно просто.

## Задачи (80 баллов)

### Задача 1\*. Осцилляции Раби (50 баллов)

На двухуровневую систему накладывается периодическое поле, которое может вызывать переходы между этой парой уровней:

$$\hat{H}(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & V e^{-i\omega t} \\ V e^{i\omega t} & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

В начальный момент времени система находилась в состоянии  $|\psi(t=0)\rangle = |\uparrow\rangle$ . Определите вероятность обнаружить её в состоянии  $|\downarrow\rangle$  через произвольное время  $t$ . Что происходит при резонансе, когда отстройка частоты  $\delta \equiv \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \hbar\omega$  обращается в ноль?

*Указание:* покажите, что от зависимости гамильтониана от времени можно избавиться «переходом во вращающуюся систему отсчёта» (rotating wave approximation) — унитарным преобразованием (см. упражнения 2, 3) вида  $\hat{U}(t) = e^{i\hat{\sigma}_z \omega_0 t}$ . Чему равна соответствующая частота  $\omega_0$ ?

### Задача 2. Два спина (30 баллов)

Найдите уровни энергии и собственные состояния для следующего гамильтониана, описывающего систему двух взаимодействующих спинов 1/2:

$$\hat{H} = -J(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) = -J(\sigma_1^x \sigma_2^x + \sigma_1^y \sigma_2^y + \sigma_1^z \sigma_2^z). \quad (2)$$