

Точно решаемые потенциалы. Часть 1

Упражнения (30 баллов)

Упражнение 1. Шаровая полость¹ (15 баллов)

Рассмотрите трёхмерную частицу массы m , движущуюся в трёхмерной шаровой полости радиуса a с бесконечными стенками:

$$U(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & |\mathbf{r}| < a \\ \infty, & |\mathbf{r}| > a \end{cases} \quad (1)$$

Каким уравнением определяются уровни энергии с фиксированным орбитальным моментом L ? Решите уравнение точно для $L = 0$, а также приближённо для высоколежащих уровней энергии при $L \geq 1$.

Указание: свободное движение в трёхмерном пространстве также сводится к функциям Бесселя, но с полуцелым индексом $J_{n+1/2}(z)$ (которые, в действительности, спец. функциями не являются, а имеют явное представление через обычные тригонометрические функции).

Упражнение 2 (15 баллов)

Определите волновую функцию для движения в трёхмерном Кулоновском потенциале² $U(\mathbf{r}) = -\alpha/r$ частицы с орбитальным квантовым числом L на строго нулевой энергии $E = 0$.

Указание: соответствующее уравнение сводится к уравнению Бесселя.

Задачи (70 баллов)

Задача 1 (30 баллов)

Исследуйте прямоугольную двумерную яму $U(\mathbf{r}) = -U_0\theta(a - |\mathbf{r}|)$ в обратном пределе глубокой ямы $U_0 \gg \hbar^2/Ma^2$. Определите количество связанных состояний с фиксированным угловым квантовым числом m (обозначив её за N_m), а также полное число связанных состояний $N = \sum_{m \in \mathbb{Z}} N_m$.

Указание: классическая частица может находиться в яме только пока её прицельный параметр меньше a ; из-за чего угловой момент может принимать довольно большие значения ($m \sim ka$, $k = \sqrt{2mU_0}/\hbar$); а с другой стороны, стандартная формула для асимптотики функций Бесселя $J_m(z)$ работает только при условии $z \gg |m| = O(1)$. По этой причине для решения этой задачи необходимо вывести выражение для асимптотики функции Бесселя при условии $z \gg 1$, $m \gg 1$, $m/z = O(1)$. Для этого воспользуйтесь стандартным интегральным представлением для функции Бесселя и проанализируйте его при помощи метода перевала.

Задача 2. Ступенька (40 баллов)

Определите коэффициенты прохождения и отражения от потенциала $U(x) = U_0 \tanh(x/a)/2$.

Указание: при помощи замены $\xi = -\exp(-2x/a)$, задача приводится к гипергеометрической функции ${}_2F_1$.

¹Такая модель описывает так называемые электронные пузыри в сверхтекучем гелии

²Задача имеет двойную важность в квазиклассическом приближении. Во-первых, без этой задачи не получается правильная формула уровней энергии атома водорода $E_n = -Ry/n^2$, потому что в формуле Бора-Зоммерфельда неправильно определяются фазовые сдвиги, о чём будет задача. А во-вторых, уже в комплексном методе WKB этот случай описывает сшивку, когда квазиклассическая точка остановки в комплексной плоскости находится близко к полюсу. Наконец, стоит отдельно отметить, что требование строго нулевой энергии физически отвечает тому, что мы нашли асимптотику волновых функций на *малых* энергиях, соответствующих не очень большим расстояниям.