

Стационарное адиабатическое приближение. Быстрые и медленные подсистемы

Задачи (100 баллов)

Задача 1. Жизнь в промежутке (20 баллов)

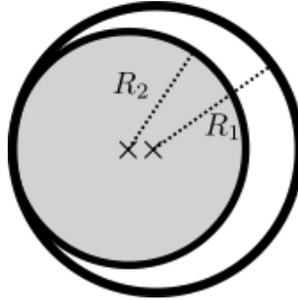


Рис. 1: Схема к задаче 1

Частица массы m находится между двумя бесконечными цилиндрами $|R_1 - R_2| \ll R_{1,2}$, которые касаются друг друга внутренним образом, как показано на рисунке. Найдите низколежащие энергетические уровни такой системы.

Задача 2. Две частицы (25 баллов)



Рис. 2: Схема к задаче 3

В одномерный ящик ширины L помещены две частицы разной массы t и $M \gg t$, как показано на рисунке. Частицы взаимодействуют точечным образом так, что они оказываются непроницаемы друг для друга. Определите низколежащие уровни энергии такой системы.

Задача 3. Поправки к адиабатике (30 баллов)

На семинаре была разобрана задача о движении свободной частицы в эллиптической полости с полуосями $a \gg b$. Определите ведущую поправку к энергии основного состояния такой системы.

Указание: есть два источника поправок к энергии: ангармонизм эффективного потенциала для медленной переменной (который мы предполагали осцилляторным), и поправки, связанные с адиабатическим приближением. Для оценки эффектов второго типа можно сделать преобразование координат, превращающее эллипс в прямоугольник; при этом адиабатический анзац является точным решением для части гамильтониана, возникающего в результате такого преобразования.

Задача 4. Фаза Берри (25 баллов)

Частица со спином $1/2$ массы t движется по кольцу радиуса R . В центр кольца помещён магнитный монополяр, который создаёт на кольце большое магнитное поле B . Гамильтониан такой системы имеет вид:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2mR^2} \partial_\varphi^2 - \mu_B B (\cos \varphi \hat{\sigma}_x + \sin \varphi \hat{\sigma}_y) \quad (1)$$

Определите уровни энергии такой системы в пределе $\mu_B B \gg 1/mR^2$.