

Нестационарная теория возмущений

Задачи (100 баллов)

Задача 1. Осцилляции Раби (20 баллов)

К атому водорода, находящемуся в основном состоянии, прикладывается переменное электрическое поле $\hat{V} = -e\mathcal{E}\hat{z}\cos(\omega t)$ с частотой $\omega = 3Ry/4 + \varepsilon$, где «отстройка частоты» и характерная величина электрического поля $e\mathcal{E}a, \varepsilon \ll Ry$ (тут $Ry = me^4/2\hbar^2$ — постоянная Ридберга, а $a = \hbar^2/me^2$ — Боровский радиус); в то же время, соотношение поля $\mathcal{E}$ и отстройки частоты ε , вообще говоря, произвольно. Определите вероятность обнаружить частицу в основном и первом возбуждённом состояниях $n = 1$ и $n = 2$ через большое время T .

Задача 2. Эффект Ландау-Зенера (15 баллов)

Рассмотрим произвольную двухуровневую систему, описываемую волновой функцией $|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}$ и следующим гамильтонианом, зависящим от времени:

$$\hat{H}(t) = \begin{pmatrix} \alpha t & \gamma \\ \gamma & -\alpha t \end{pmatrix} \quad (1)$$

В начальный момент времени $t \rightarrow -\infty$, система находилась в первом состоянии (так что $|\psi_1(t \rightarrow -\infty)|^2 = 1$). Определите вероятность перехода системы во второе состояние после такой эволюции $|\psi_2(t \rightarrow +\infty)|^2$, считая «скорость движения уровней» большой $\alpha \gg \gamma^2$.

Задача 3. Осциллятор (15 баллов)

Рассмотрите электрон, движущийся в потенциале гармонического осциллятора. К системе приложено меняющееся со временем электрическое поле, так что Гамильтониан имеет вид:

$$\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2} + e\mathcal{E}(t)\hat{x}, \quad \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{-t^2/\tau^2} \quad (2)$$

При $t \rightarrow -\infty$, электрон находится в основном состоянии системы. Определите вероятность обнаружить его в произвольном n -том возбуждённом состоянии при $t \rightarrow +\infty$ в ведущем порядке теории возмущений (считая поле слабым $e^2\mathcal{E}^2 \ll m\omega^3$).

Задача 4. Двухфотонная ионизация (50 баллов)

При помощи золотого правила Ферми на семинаре была вычислена интенсивность ионизации связанного состояния в одномерной дельта-яме $U(x) = -\kappa\delta(x)/m$. В задаче имелся порог ионизации — в частности, при $\omega < E_0 = \kappa^2/2m$, ответ был нулевым. Разумеется, причина этому — использование первого порядка теории возмущений («однофотонное приближение»); реальный ответ отличен от нуля на всех частотах. В данной задаче предлагается исследовать, как устроено обобщение золотого правила Ферми на примере этой же задачи при частотах $E_0/2 < \omega < E_0$, где ведущий вклад дают именно двухфотонные процессы.

- (15 баллов)** Выведите поправку второго порядка теории возмущений для гармонического возмущения общего вида $\hat{V}(t) = \hat{F}e^{-i\omega t} + \hat{F}^\dagger e^{i\omega t}$ (как и на семинаре) к произвольному коэффициенту $a_f(t)$, считая что изначально частица находилась в каком-то состоянии $|\psi_i\rangle$ дискретного спектра. Структура ответа допускает следующую интерпретацию: переход происходит сперва виртуальным образом на некий промежуточный уровень $i \rightarrow \nu$, а затем — в конечное состояние $\nu \rightarrow f$. Учтите, что промежуточное состояние ν , вообще говоря, относится к непрерывному спектру.
- (10 баллов)** Полученное выражение содержит достаточно много членов, имеющих различную интерпретацию — зависящие от времени части в пределе $t \rightarrow \infty$ превратятся в дельта-функцию определённого вида. Учитывая отсутствие однофотонных процессов ($\omega < E_0$), продемонстрируйте, что вклад в пределе $t \rightarrow \infty$ будет лишь от одного члена. Приведите ответ для вероятности перехода в единицу времени к виду, аналогичному золотому правилу Ферми:

$$dw_{i \rightarrow f} = 2\pi |A_{if}^{(\text{eff})}|^2 \delta(E_f - E_i - 2\omega) d\nu_f \quad (3)$$

Выведите выражение для эффективного матричного элемента $A_{if}^{(\text{eff})}$.

- (15 баллов)** Вычислите эффективный матричный элемент $A_{if}^{(\text{eff})}$. Обратите внимание, что матричный элемент $F_{\nu f}$ между промежуточным состоянием ν и конечным состоянием f сингулярен (в отличие от матричного элемента $F_{i\nu}$), поэтому для вычисления эффективного матричного элемента $A_{if}^{(\text{eff})}$ предлагается поменять местами интегрирование по промежуточным состояниям $d\nu$ и координатное интегрирование в матричном элементе $F_{\nu f}$.

4. **(10 баллов)** Проинтегрируйте по конечным состояниям и определите время жизни основного состояния в интересующем нас пределе. Ответ выразите через частоту ω , энергию связанного состояния в яме E_0 , а также массу m , заряд e и амплитуду электрического поля $\mathcal{E}$. Постройте ответ численно.

Указание: поскольку вычислительно задача достаточно трудоёмкая, рекомендуется для промежуточных вычислений использовать какую-нибудь систему компьютерной алгебры (к примеру, Wolfram Mathematica).