

Задачи к семинару «Основы квантовой механики»

Упражнения (20 баллов)

Упражнение 1. Унитарные матрицы (5 баллов)

Покажите, что унитарные матрицы, как и эрмитовы, диагонализуемы. *Указание:* покажите, что эрмитова и анти-эрмитова часть унитарного оператора диагонализуемы совместно.

Упражнение 2. Замена базиса (5 баллов)

В квантовой механике замена базиса реализуется унитарными преобразованиями $|\psi'\rangle = \hat{U}|\psi\rangle$.

1. Покажите, что гамильтониан при этом заменяется на $\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger$.
2. Последнее утверждение необходимо модифицировать, если унитарное преобразование зависит явно от времени $\hat{U} = \hat{U}(t)$. Покажите, что в таком случае гамильтониан необходимо заменить на $\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger - i\hbar\hat{U}\partial_t\hat{U}^\dagger$.

Упражнение 3. Матрицы Паули (10 баллов)

Покажите следующие свойства матриц Паули (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование):

1. Они, совместно с единичной матрицей $\sigma^0 = \hat{\mathbb{I}}_{2\times 2}$, представляют собой базис в пространстве эрмитовых матриц 2×2 .
2. Они удовлетворяют следующими правилами перемножения: $\hat{\sigma}^\alpha \hat{\sigma}^\beta = \delta_{\alpha\beta} \hat{\mathbb{I}} + i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\sigma}^\gamma$ ($\alpha, \beta, \gamma \in \{x, y, z\}$, а $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — символ Леви-Чевиты).
3. Они удобно экспоненцируются: $\exp(in_{\alpha}\hat{\sigma}^{\alpha}) = \cos a + in_{\alpha}\hat{\sigma}^{\alpha} \sin a$ (тут $\mathbf{n}$ — произвольный единичный вектор). *Указание:* разложите экспоненту в ряд; из-за простого правила произведения матриц Паули, произвольные степени от их линейных комбинаций вычисляются достаточно просто.

Задачи (80 баллов)

Задача 1*. Осцилляции Раби (50 баллов)

На двухуровневую систему накладывается периодическое поле, которое может вызывать переходы между этой парой уровней:

$$\hat{H}(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & V e^{-i\omega t} \\ V e^{i\omega t} & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

В начальный момент времени система находилась в состоянии $|\psi(t=0)\rangle = |\uparrow\rangle$. Определите вероятность обнаружить её в состоянии $|\downarrow\rangle$ через произвольное время t . Что происходит при резонансе, когда отстройка частоты $\delta \equiv \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \omega$ обращается в ноль?

Указание: покажите, что от зависимости гамильтониана от времени можно избавиться «переходом во вращающуюся систему отсчёта» (rotating wave approximation) — унитарным преобразованием (см. упражнения 2, 3) вида $\hat{U}(t) = e^{i\hat{\sigma}_z \omega_0 t}$. Чему равна соответствующая частота ω_0 ?

Задача 2. Два спина (30 баллов)

Найдите уровни энергии и собственные состояния для следующего гамильтониана, описывающего систему двух взаимодействующих спинов $1/2$:

$$\hat{H} = -J(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) = -J(\sigma_1^x \sigma_2^x + \sigma_1^y \sigma_2^y + \sigma_1^z \sigma_2^z). \quad (2)$$