

Задачи к семинарам «Квазиклассическое приближение»

3 декабря 2019 г.

Упражнения (45 баллов)

Упражнение 1. Другие задачи шивки (15 баллов)

Найдите квазиклассические уровни энергии для следующих потенциалов, и сравните полученные ответы с уже известными.

- (5 баллов) треугольная яма $U(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0, \\ Fx, & x > 0. \end{cases}$
- (10 баллов) трёхмерный кулоновский потенциал $U(r) = -\frac{e^2}{r}$ для сферически симметричных состояний. *Указание:* определите граничное условие в нуле, а в правой точке остановки используйте стандартное.

Указание: обратите внимание, что в этих задачах в одной из точек остановки линейное приближение для потенциала неприменимо, поэтому условие шивки необходимо модифицировать. Для второй задачи вам может помочь упражнение 5.2.

Упражнение 2 (15 баллов)

Рассмотрите $N(E)$ — количество состояний с энергией, меньше заданной (E) в поле произвольного адекватного трехмерного сферически-симметричного потенциала $U(r)$ в рамках квазиклассического приближения. Покажите, что следующие два способа вычисления приводят к одному и тому же результату а) одномерное правило квантования Бора-Зоммерфельда для радиальной переменной (отдельно для каждой сферической гармоники) с последующим суммированием по гармоникам и б) использование интеграла по трехмерному фазовому объему: $N(E) = \int d^3r \int d^3p / (2\pi\hbar)^3 \cdot \theta(E - E_p)$, где $E_p = p^2/2m$.

Упражнение 3 (10 баллов)

Найдите вероятность квазиклассического туннелирования под барьером $U(x) = \frac{U_0}{\cosh^2(x/a)}$ для частиц энергии $0 < E < U_0$. Сравните ответ с точным, найденным в 5 семинаре.

Упражнение 4 (5 баллов)

- Отнормируйте волновые функции связанного состояния, которые следуют из правила квантования Бора-Зоммерфельда, на единицу.
- Отнормируйте квазиклассические бегущие волны (в отсутствие отражения) на $2\pi\delta(E - E')$.

Задачи (55 баллов)

Задача 1. Почти квазиклассический потенциал (20 баллов)

Определите в квазиклассическом приближении коэффициент отражения частицы энергии E от потенциала, который в некоторой точке x_0 имеет особенность. Исследуйте следующие случаи:

1. Потенциал в точке x_0 испытывает скачок, то есть $U(x_0 - 0) = U_1$ и $U(x_0 + 0) = U_2$.
2. Потенциал в точке x_0 испытывает излом, то есть $U(x < x_0) \approx U_0 - F_1(x - x_0)$ и $U(x > x_0) \approx U_0 - F_2(x - x_0)$.

Задача 2. Одномерный кристалл и модель сильной связи (35 баллов)

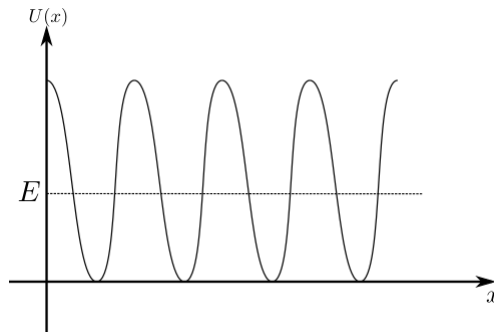


Рис. 1: Модель одномерного кристалла

Определите зоны и их законы дисперсии для периодической задачи, изображённой на рисунке, считая применимым квазиклассическое приближение. Проинтерпретируйте результат в терминах модели сильной связи и следующего гамильтониана (для каждой зоны). Определите E_n и t_n :

$$\hat{H}_n = \begin{pmatrix} \ddots & -t_n & 0 & 0 & \dots \\ -t_n & E_n & -t_n & 0 & 0 \\ 0 & -t_n & E_n & -t_n & 0 \\ 0 & 0 & -t_n & E_n & -t_n \\ \vdots & 0 & 0 & -t_n & \ddots \end{pmatrix}. \quad (1)$$