Задачи к семинару «Точно решаемые потенциалы. Часть 2»

Упражнения (35 баллов)

Упражнение 1. Функция Эйри (10 баллов)

1. Используя асимптотики функций Эйри для инфинитного движения (без бесконечной стенки), отнормируйте их на дельта-функцию от энергии, а также убедитесь в соотношении полноты. А именно, выпишите волновые функции, удовлетворяющие следующему условию:

$$\int dx \psi_E^*(x) \psi_{E'}(x) = \delta(E - E') \tag{1}$$

и убедитесь, что для них выполняется соотношение

$$\int dE \psi_E^*(x') \psi_E(x) = \delta(x - x') \tag{2}$$

Упражнение 2. Квантовый гармонический осциллятор (10 баллов)

1. Вычислите $\left\langle \hat{x}^4 \right\rangle$ по произвольному собственному состоянию гармонического осциллятора $|n\rangle$.

2. Частица находилась в основном состоянии гармонического осциллятора с частотой ω. Пусть в какой-то момент времени характерная частота осциллятора мгновенно меняется и становится равной ω'. Вычислите вероятность остаться в основном состоянии.

Упражнение 3. Когерентные состояния (15 баллов)

Когерентные состояния гармонического осциллятора определяются как собственные состояния для понижающего оператора $\hat{a}$, с собственным комплексным числом $\alpha \in \mathbb{C}$: $\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$.

1. Найдите координатное представление когерентного состояния $\psi_\alpha(x) \equiv \langle x|\alpha\rangle$. Для гамильтониана квантового гармонического осциллятора $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2})$, найдите также $\psi_\alpha(x, t) \equiv \langle x|\alpha(t)\rangle$.

2. Выразите когерентное состояние $|\alpha\rangle$ явно через собственные состояния осциллятора, нормировав его условием $\langle 0|\alpha\rangle = 1$.

3. Представьте их в виде $|\alpha\rangle = \hat{C}(\alpha) |0\rangle$; найдите явный вид оператора $\hat{C}(\alpha)$.

4. Вычислите перекрытие когерентных состояний $\langle \alpha|\alpha'\rangle$.

5. Когерентные состояния образуют *переполненный базис*. Докажите следующую формулу для «разложения единицы»:

$$\hat{\mathbb{I}} = \int \frac{d\alpha d\alpha^*}{\pi} \cdot e^{-|\alpha|^2} |\alpha\rangle \langle \alpha| \tag{3}$$

(мы определили $d\alpha d\alpha^* \equiv d(\mathrm{Re}\alpha) d(\mathrm{Im}\alpha)$).

Задачи (65 баллов)

Задача 1. Теорема Вика (20 баллов)

Квантовый гармонический осциллятор находится при температуре T, то есть описывается матрицей плотности $\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta\omega \hat{a}^\dagger \hat{a}}$. Вычислите среднее значение по этому состоянию от оператора $\left\langle e^{\alpha_1 \hat{a} + \alpha_2 \hat{a}^\dagger} \right\rangle$ и докажите следующее соотношение:

$$\left\langle e^{\alpha_1 \hat{a} + \alpha_2 \hat{a}^\dagger} \right\rangle = e^{\frac{1}{2}\left\langle \left(\alpha_1 \hat{a} + \alpha_2 \hat{a}^\dagger\right)^2 \right\rangle} \tag{4}$$

Указание: вам может пригодиться базис когерентных состояний, а также формула Бейкера-Кэмбелла-Хаусдорфа:

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}, \quad \text{if } [\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] = [\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]] = 0 \tag{5}$$

Задача 2. QHO in a box (20 баллов)

Квантовый гармонический осциллятор помещён в большую «коробку» размера $2L$ ровно посередине, так что потенциальная энергия имеет следующий вид:

$$U(x) = \begin{cases} \frac{m\omega^2 x^2}{2}, & |x| < L \\ \infty, & |x| > L \end{cases} \tag{6}$$

Определите *силу*, с которой осциллятор, находясь в одном из низколежащих уровней энергии $n \ll \frac{L^2}{\hbar/m\omega}$, действует на эти стенки.

Задача 3. Hydrogen atom in 2D (25 баллов)

Определите уровни энергии и кратности их вырождения, а также стационарные волновые функции для двумерной частицы, движущейся в притягивающем потенциале $U(\boldsymbol{r}) = -\frac{e^2}{r}$. Указание: задача приводится к вырожденной гипергеометрической функции ${}_1F_1$.