Задачи по Квантовой Механике Весна 2016
Экзамен - 1

1. (5) Два источника испускают пары электронов. Они не подписаны, но известно, что один источник испускает запутанные пары:

$$|\psi\rangle = \frac{|\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2}{\sqrt{2}},$$

а другой - случайно испускает пары $|\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2$ или $|\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2$ с равной вероятностью, где состояния $|\updownarrow\rangle$ отвечают определенной проекции спина на ось z.

Электроны вылетевшей пары отправляются каждый к своему детектору, так что i-й детектор измеряет проекцию спина i-го электрона на ось x ($i = 1, 2$). Со включенным источником 1, детекторы зафиксировали следующие четыре события:

$$1. \,|+\rangle_1, |+\rangle_2 \;\; 2. \,|-\rangle_1, |+\rangle_2 \;\; 3. \,|+\rangle_1, |-\rangle_2 \;\; 4. \,|+\rangle_1, |+\rangle_2$$

Со включенным источником 2:

$$1. \,|+\rangle_1, |-\rangle_2 \;\; 2. \,|-\rangle_1, |+\rangle_2 \;\; 3. \,|-\rangle_1, |+\rangle_2 \;\; 4. \,|+\rangle_1, |-\rangle_2$$

Какой из источников испускает запутанные пары?

2. (10) В вертикально расположенном в поле тяжести непроницаемом круговом конусе находятся $N \gg 1$ фермионов. Найдите энергию основного состояния.

3. (10) Коле нужно минимизировать функцию

$$f(\mathbf{z}) = a_{12}z_1z_2 + a_{23}z_2z_3 + a_{13}z_1z_3 + a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3$$

по всевозможным наборам значений $z_i = \pm 1$ (здесь a - некоторые действительные числа). Он мог бы просто перебрать все 2^3 вариантов вручную, но он слышал про квантовые вычисления и решил построить квантовую систему, которая решала бы эту задачу вместо него. Коля догадался, что основное состояние Гамильтониана трёх спинов $\frac{1}{2}$ вида:

$$\hat{H}_0 = J\left(\sum_{i<j} a_{ij}\hat{\sigma}_i^z\hat{\sigma}_j^z + \sum_i a_i\hat{\sigma}_i^z\right)$$

даёт решение его задачи ($J > 0$). Он изготовил систему с Гамильтонианом, зависящим от параметра s:

$$\hat{H}(s) = s\hat{H}_0 + (1-s)B\sum_i \hat{\sigma}_i^x.$$

Установив $s = 0$, он охладил систему до температуры $1/\beta$, отключил систему от холодильника и по закону $s(t) = t/T$ за время T изменил параметр $s : 0 \to 1$. Он полагает, что теперь, измерив значения проекций спинов на ось z, получит набор $\mathbf{z}$, минимизирующий функцию $f(\mathbf{z})$. Оцените, какие условия на параметры B, β, J и T ему следует иметь в виду, если он рассчитывает получить правильный ответ с вероятностью, близкой к единице? *Примечание. Считайте, что все параметры а - порядка единицы.*

4. (15) У Игоря есть источник электронов, испускающий их в состоянии вида (состояния $|\updownarrow\rangle$ отвечают определенной проекции спина на ось z):

$$|\psi\rangle = \frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Направление и величина (v) скорости всех вылетающих электронов одинаковы. В лаборатории включено постоянное магнитное поле $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$. На пути вылетающего из источника пучка Игорь поставил детектор, измеряющий проекцию спина на ось x. Он заметил, что показания детектора P осциллируют как функция расстояния до источника L. Получите зависимость $P(L)$.

Продолжив эксперименты, Игорь заметил, что при удалении от источника амплитуда осцилляций в зависимости $P(L)$ спадает. Он подозревает, что его источник магнитного поля не так уж и хорош, и на самом деле $B = B + \delta B(t)$, где $\delta B(t)$ - белый шум. Надите мощность этого шума, если известно, что амплидута осцилляций уменьшается в 2.7 раза на расстоянии L_ϕ от источника.

5. (25) При $t = 0$ спин находится в чистом состоянии: $|\psi\rangle$. При $t = 0$ включается случайное магнитное поле $\mathbf{B}(t) = B_0\mathbf{h}(t)$ с вероятностным распределением:

$$\mathcal{P}[\mathbf{h}(t)] \propto \exp\left[-\int_{-\infty}^{\infty}\left(J_\perp {\mathbf{h}_\perp}^2(t) + J_z h_z^2(t)\right)dt\right],$$

где $J_\perp \gg J_z$. Найдите зависимость матрицы плотности спина от времени для двух начальных состояний: 1) $|\psi\rangle = \frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$ и 2) $|\psi\rangle = |\uparrow\rangle$ (здесь состояния $|\updownarrow\rangle$ отвечают определенной проекции спина на ось z).

6. (25) Рассмотрите гармонический осциллятор:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2}$$

в равновесии при температуре T. Вычислите элементы матрицы плотности в координатном представлении: $\langle x' | \, \hat{\rho} \, | x \rangle$.