

**Задачи по Квантовой Механике    Весна 2016**  
**Экзамен - 2**

1. (10) Частица массы  $m$  движется в плоскости в потенциале

$$V(x, y) = \frac{m\omega^2}{2} (x^2 + y^2) + \lambda m\omega^2 xy.$$

Найдите  $\langle x^2 \rangle$  в состоянии теплового равновесия с температурой  $T$ .

2. (10+10) (i) Вычислите расщепление нижних уровней в потенциале

$$U(x) = \frac{m\lambda^2}{4} (x^2 - a^2)^2$$

в приближении ВКБ. (ii) Рассмотрев одноинстантонные траектории, получите правильный предэкспоненциальный множитель (с точностью до численного коэффициента).

3. (10+10) (i) Вычислите ширину нижнего уровня в потенциале

$$U(x) = 3m\lambda^2 a x^2 (a - 2x/3)$$

в приближении ВКБ. (ii) Рассмотрев одноинстантонные траектории, получите правильный предэкспоненциальный множитель (с точностью до численного коэффициента).

4. (30) Пусть  $H_0 = -\partial_x^2 + 1$ , и  $H_1(x) = -\partial_x^2 + 1 - U_0 \operatorname{sech}^2(x)$ . Вычислите соотношение определителей  $\det H_1 / \det H_0$ .

5. (20+10) В одномерной яме с бесконечными стенками длиной  $L$  находится  $N \gg 1$  невзаимодействующих бесспиновых фермионов  $\hat{H}_0 = \sum_i \frac{p_i^2}{2m}$ . В центре ямы находится двухуровневая система с Гамильтонианом  $\hat{H}_1 = \varepsilon \hat{\sigma}_z$ , взаимодействующая с Ферми-газом согласно  $\hat{V} = u |\uparrow\rangle \langle \uparrow| \sum_i \delta(\hat{r}_i)$ . (i) При каком соотношении  $u$  и  $\varepsilon$  основное состояние всей системы является вырожденным:  $|\Psi_G\rangle = c_1 |\Psi_1\rangle + c_2 |\Psi_2\rangle$ ? (ii) Оцените матричный элемент  $\langle \Psi_1 | \hat{\sigma}_x | \Psi_2 \rangle$ .

6. (30) Рассмотрите квантовый маятник массы  $m$  и длины  $l$  в поле тяжести с ускорением  $g$ . Найдите одноинстантонную траекторию, отвечающую перевороту маятника на угол  $2\pi$  и вычислите ширину уровня (с точностью до численного коэффициента).