

Задачи по Квантовой Механике Весна 2016
Математический минимум

1. Рассмотрите дзета-функцию Римана, заданную для $\operatorname{Re} s > 1$ суммой:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad (1)$$

при действительных s . Покажите, что в области легитимности определения (1), можно написать:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} \frac{e^{-t/2}}{2 \sinh t/2} dt \quad (2)$$

и

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} \left[\frac{e^{-t/2}}{2 \sinh t/2} - \frac{e^{-t/2}}{t} \right] dt + \frac{2^{s-1}}{s-1} \quad (3)$$

Заметьте, что формула (3) сохраняет смысл в более широкой области, чем (1). Воспользуйтесь этим, чтобы вычислить $\zeta(+0)$ и $\zeta'(+0)$.

2. Рассмотрите оператор $\hat{A}$ с собственными значениями λ_n . Покажите, что

$$\det \hat{A} = \exp(-\zeta'(0)),$$

где функция $\zeta(s)$ определена следующим образом:

$$\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{\lambda_n^s}.$$