Задачи по Квантовой Механике   Весна 2015
Задание 1: Матрица плотности

1. (10) Рассмотрим частицу с угловым моментом 1 и выберем базис из трёх собственных векторов проекции углового момента на ось z с собственными значениями $+1,\ -1,\ 0$. Пусть ансамбль характеризуется матрицей ρ:

$$\rho = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   - Является ли ρ допустимой матрицей плотности? Какое состояние она описывает - чистое или смешанное? Найдите энтропию такого состояния.
   - Вычислите среднее значение и среднеквадратичное отклонение наблюдаемой J_z.

2. (10) Вычислите ожидаемое значение оператора спина $\langle \mathbf{S} \rangle$ и его среднеквадратичное отклонение $\langle (\mathbf{S} - \langle \mathbf{S} \rangle)^2 \rangle$ для чистого: $|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right)$ и для смешанного: $\hat{\rho} = \frac{1}{2}\left(\hat{P}_{\uparrow} + \hat{P}_{\downarrow}\right)$ состояний.

3. (20) Сравните запутанное состояние двух систем:

$$|\chi\rangle = \frac{|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B}{\sqrt{2}}$$

   с их смешанным состоянием:

$$\hat{\rho} = \frac{|0\rangle_A \langle 0|_A |0\rangle_B \langle 0|_B}{2} + \frac{|1\rangle_A \langle 1|_A |1\rangle_B \langle 1|_B}{2}.$$

   Можно ли отличить эти состояния, проводя измерения наблюдаемых, относящихся только к одной из систем? Чтобы выяснить этот вопрос, вычислите редуцированную матрицу плотности $\rho_A = \mathrm{tr}_B\left(\rho_{AB}\right)$ каждого из этих состояний.

4. (30) Рассмотрите двухуровневую систему с Гамильтонианом

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \epsilon(t) & 0 \\ 0 & -\epsilon(t) \end{pmatrix}.$$

Здесь $\epsilon(t)$ - Гауссов стохастический процесс с нулевым средним (для спина, например, $\epsilon(t)$ имеет смысл флуктуирующего магнитного поля, направленного по оси z). Пусть в начальный момент времени $t = 0$ система находилась в когерентной суперпозиции $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$.

- Найдите матрицу плотности в момент времени t, считая $\epsilon(t)$ заданной функцией времени.
- Выполните усреднение по $\epsilon(t)$ и определите характер зависимости внедиагональных элементов матрицы плотности от времени.

5. (30) Рассмотрите двухуровневую систему (s), взаимодействющую с гармоническим осциллятором (n):

$$\hat{H} = \frac{\epsilon}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\omega\left(\hat{b}^+\hat{b} + \frac{1}{2}\right) + V\left(\hat{a}^+\hat{c} + \hat{c}^+\hat{a}\right).$$

Здесь оператор $\hat{c}^+$ переводит осциллятор из основного состояния в первое возбуждённое: $\hat{c} = |n = 0\rangle \langle n = 1|$, а оператор $\hat{a}^+$ является повышающим оператором для двухуровневой системы s.

Пусть начальное состояние системы $(t = 0)$ представляет собой когерентную суперпозицию:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|s = 0\rangle + |s = 1\rangle\right)|n = 0\rangle.$$

- Вычислите матрицу плотности $\hat{\rho}_{s+n}$ полной системы как функцию времени.
- Вычислите редуцированную матрицу плотности $\hat{\rho}_s$ двухуровневой системы.
- Постройте (качественно) зависимость энтропии всей системы $s+n$ и подсистемы s от времени.