Задачи по Квантовой Механике   Весна 2015
Задание 2: Вторичное квантование

1. (10) Рассмотрите прыжковый Гамильтониан для системы фермионов на N узлах:
$$\hat{H} = -\sum_{i,j} t_{i,j}\hat{c}_i^+\hat{c}_j.$$
Пусть $|\psi\rangle$ - одно из собственных состояний такого Гамильтониана и $C_{i,j}$ - одночастичная корреляционная функция, определенная как
$$C_{i,j} = \langle\psi|\,\hat{c}_i^+\hat{c}_j\,|\psi\rangle\,.$$
Покажите, что старшие корреляционные функции могут быть выражены через C, например:
$$\langle\psi|\,\hat{c}_i^+\hat{c}_j^+\hat{c}_k\hat{c}_l\,|\psi\rangle = C_{i,l}C_{j,k} - C_{i,k}C_{j,l}. \tag{1}$$

2. (10) Покажите, что для усреднения с любой матрицей плотности вида:
$$\hat{\rho} = Z^{-1}e^{-\sum_{i,j}\hat{c}_i^+h_{ij}\hat{c}_j},$$
справедливо соотношение, аналогичное (1):
$$\mathrm{tr}\left(\hat{c}_i^+\hat{c}_j^+\hat{c}_k\hat{c}_l\hat{\rho}\right) = C_{i,l}C_{j,k} - C_{i,k}C_{j,l}, \tag{2}$$
с парными корреляционными функциями, определенными как:
$$C_{i,j} = \mathrm{tr}\left(\hat{c}_i^+\hat{c}_j\hat{\rho}\right).$$

3. (20) Рассмотрите прыжковый Гамильтониан на цикле из 4-х узлов (рисунок 1), считая, что энергии состояний на всех узлах одинаковые. Вычислите редуцированную матрицу плотности, описывающую подсистему из двух соседних узлов (см. рисунок). С помощью этой матрицы плотности, найдите 1) функцию распределения числа частиц в такой подсистеме и 2) энтропию этой подсистемы (для состояния с 2-мя фермионами на всей решетке).

Примечание. По определению, редуцированная матрица плотности $\hat{\rho}_A$, действуя в подпространстве чисел заполнения состояний

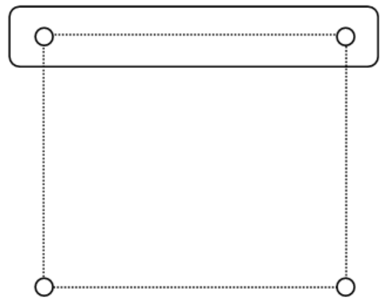

Рис. 1: Цепочка из 4 узлов с 2-узловой подсистемой.

на узлах подсистемы A, позволяет воспроизвести все корреляторы операторов рождения/уничтожения на этих узлах. Как следует из результатов задач 1 и 2, если существует матрица плотности вида экспоненты от квадратичной формы по операторам рождения/уничтожения из A, правильно воспроизводящая парные корреляционные функции, она и есть искомая матрица $\hat{\rho}_A$.

4. (20) Рассмотрите прыжковый гамильтониан на двух цепочках с перескоками между цепочками:

$$\hat{H} = t\sum_i \left(\hat{a}^+_{i+1}\hat{a}_i + \hat{a}^+_i\hat{a}_{i+1}\right) - t\sum_i \left(\hat{b}^+_{i+1}\hat{b}_i + \hat{b}^+_i\hat{b}_{i+1}\right) + \delta\sum_i \left(\hat{a}^+_i\hat{b}_i + \hat{b}^+_i\hat{a}_i\right).$$

Найдите спектр энергетических уровней такой системы. Найдите редуцированную матрицу плотности $\hat{\rho}_A = Z^{-1}e^{-\mathcal{H}}$ цепочки A. Изобразите амплитуду перескока через k узлов в редуцированном Гамильтониане $\mathcal{H}$ как функцию k при нескольких значениях δ.

5. (40) Рассмотрите спиновую цепочку с XX взаимодействием длины N:

$$\hat{H} = -J\sum_{i=0}^{N-1}(\hat{s}^x_i\hat{s}^x_{i+1} + \hat{s}^y_i\hat{s}^y_{i+1}) - h\sum_{i=0}^{N-1}\hat{s}^z_i$$

Рассмотрите намагниченность $\hat{M}_n = \sum_{i=0}^{n-1}\hat{s}^z_i$ её подсистемы длины n. Вычислите магнитную восприимчивость этой подсистемы $\chi = \left.\frac{\partial\langle\hat{M}_n\rangle}{\partial h}\right|_{h=0}$ и флуктуации намагниченности: $\left\langle\hat{M}_n^2\right\rangle$ (в отсутствие поля).

Примечание. Чтобы диагонализовать Гамильтониан, воспользуйтесь представлением спиновых операторов через Майорановские операторы $\hat{c}_m$ с коммутационными соотношениями $\{\hat{c}_m, \hat{c}_n\} = 2\delta_{mn}$:

$$\hat{c}_{2l} = \left(\prod_{m=0}^{l-1} \hat{\sigma}_m^z\right) \hat{\sigma}_l^x, \ \hat{c}_{2l+1} = \left(\prod_{m=0}^{l-1} \hat{\sigma}_m^z\right) \hat{\sigma}_l^y$$

где $l = 0, ..., N-1$. Чтобы воспользоваться этим преобразованием, обратите внимание на произведения $\hat{c}_{2l+1}\hat{c}_{2l+2}$, $\hat{c}_{2l}\hat{c}_{2l+3}$ и $\hat{c}_{2l}\hat{c}_{2l+1}$.