Задачи по Квантовой Механике Весна 2015
Задание 3: Открытые системы

1. (10) Спин 1/2 находится в постоянном магнитном поле $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ в тепловом равновесии с температурой T. Вычислите корреляционные функции $C_z(t) = \left\langle \hat{S}_z(t)\hat{S}_z(0) \right\rangle$ и $C_x(t) = \left\langle \hat{S}_x(t)\hat{S}_x(0) \right\rangle$.

2. (15) Рассмотрите гармонический осциллятор с Гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2},$$

находящийся в тепловом равновесии при температуре T. Вычислите функцию распределения $P(x)$ координаты осциллятора x.

3. (20) Рассмотрите осциллятор массы m: $\hat{H}_0 = \omega_0 \left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$ взаимодействующий с набором осцилляторов

$$\hat{H}_1 = \sum_k \omega_k \left(\hat{b}_k^+\hat{b}_k + \frac{1}{2}\right)$$

в равновесии при температуре T, так что полный Гамильтониан имеет вид:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 + \lambda \sum_k \left(\hat{a}\hat{b}_k^+ + \hat{b}_k\hat{a}^+\right)$$

Считая спектр осцилляторов непрерывным, исключите степени свободы $\hat{b}_k$ и получите уравнение, описывающее зависимость импульса осциллятора $\hat{a}$ от времени:

$$\dot{\hat{p}} + \gamma\hat{p} + m\omega_0^2\hat{x} = \hat{f}(t) \tag{1}$$

с некоторым γ. Вычислите коррелятор случайной силы $\hat{f}(t)$:

$$\left\langle \hat{f}(t)\hat{f}(t') \right\rangle = F(t - t').$$

Покажите, что на *классических* частотах (много меньших температуры k_BT) можно записать $F(t) = \mathcal{F}\delta(t)$ и получите связь коэффициентов γ и $\mathcal{F}$.

4. (20) Рассмотрите осциллятор, взаимодействующий с резервуаром, описываемый Ур. (1). Покажите, что независимо от начальных условий, на достаточно большом времени, осциллятор выходит на стационарный режим, в котором $\langle \hat{a}^+\hat{a}\rangle = n_B(\omega_0)$, где $n_B(\omega)$ - функция Бозе-распределения. Вычислите корреляционную функцию координаты осциллятора в стационарном режиме:

$$g(t) = \frac{1}{2}\left\langle x(0)x(t) + x(t)x(0)\right\rangle .$$

5. (35) Рассмотрите двухуровневую систему $\hat{H}_0 = \frac{\omega}{2}\hat{\sigma}_z$, взаимодействующую с резервуаром (набором осцилляторов)

$$\hat{H}_1 = \sum_k \omega_k \left(\hat{b}_k^+\hat{b}_k + \frac{1}{2}\right),$$

так что полный Гамильтониан имеет вид:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 + \lambda\hat{\sigma}_z \sum_k \left(\hat{b}_k^+ + \hat{b}_k\right).$$

- Вычислите оператор эволюции системы, описываемой Гамильтонианом $\hat{H}$.
- Считая, что в начальном состоянии ($t = 0$) двухуровневая система и резервуар нескоррелированы: $\hat{\rho}_{tot} = \hat{\rho}\otimes\hat{\rho}_1$, и резервуар находится в равновесии с некоторой температурой T, так что $\hat{\rho}_1 = \frac{e^{-\beta\hat{H}_1}}{\operatorname{tr} e^{-\beta\hat{H}_1}}$, получите зависимость матрицы плотности двухуровневой подсистемы от времени $\hat{\rho}(t) = \operatorname{tr}_1(\hat{\rho}_{tot})$. Решите задачу сперва для нулевой, затем для конечной температуры T.

Примечание 1. Для вычисления оператора эволюции удобно воспользоваться представлением взаимодействия, исключив 'тривиальную' временную зависимость, создаваемую $\hat{H}_0 + \hat{H}_1$, тогда

$$\hat{H}_{int}(t) = \lambda\hat{\sigma}_z \sum_k \left(e^{i\omega_k t}\hat{b}_k^+ + e^{-i\omega_k t}\hat{b}_k\right)$$

и оператор эволюции может быть записан в виде

$$\hat{U}(t) = \mathcal{T}_{\leftarrow} e^{-i\int_0^t \hat{H}_{int}(t')dt'}.$$

Знак временного упорядочения в этом выражении нельзя опустить, так как операторы $\hat{H}_{int}(t')$ в различные моменты времени не коммутируют. Однако, их коррелятор является числом:

$$\left[\hat{H}_{int}(t), \hat{H}_{int}(t')\right] = c(t - t').$$

Покажите, что в таком случае справедливо соотношение:

$$\mathcal{T}_{\leftarrow} e^{-i\int_0^t \hat{H}_{int}(t')dt'} = e^{i\phi(t)} e^{-i\int_0^t \hat{H}_{int}(t')dt'}$$

с некоторой фазой $\phi(t)$ (выразите её через $c(t)$).

Примечание 2. Для вычисления следа по степеням свободы резервуара при конечной температуре может оказаться удобным использование базиса когерентных состояний Задача 2.5.