Задачи по Квантовой Механике   Весна 2015
Задание 5: Гауссов функциональный интеграл

1. (10) Вычислите интеграл по функциям $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$:

$$\Pi(\mathbf{R}_2, T; \mathbf{R}_1, 0) = \int e^{\frac{i}{2\hbar}\int_0^T \left[m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+\epsilon(y\dot{x}-x\dot{y})\right]dt}\mathcal{D}\mathbf{r}(t) \tag{1}$$

таким, что

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{R}_1, \ \mathbf{r}(T) = \mathbf{R}_2.$$

2. (10) Рассмотрите оператор $\hat{A}(m) = -\partial_x^2 + m^2$ в пространстве функций $\psi(x)$ на отрезке $[0, L]$ с граничными условиями $\psi(0) = \psi(L) = 0$. Вычислите регуляризованный определитель:

$$Z(m) = \frac{\det \hat{A}(m)}{\det \hat{A}(0)} \tag{2}$$

двумя способами: i) воспользовавшись явным выражением для собственных значений оператора $\hat{A}(m)$ и ii) теоремой Гельфанда-Яглома, выразив $Z(m)$ через решение соответствующего дифференциального уравнения с начальными условиями.

3. (15) При $t = 0$ гармонический осциллятор с Гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} \tag{3}$$

находится в начале координат. Вычислите амплитуду вероятности $C(T)$ того, что осциллятор будет обнаружен в начале координат спустя время T, пользуясь представлением $C(T)$ в виде интеграла по траекториям.

4. (15) Вычислите бесконечное произведение

$$P(R) = \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{1 + z_n^2/R^2}{z_n^2/R^2}, \tag{4}$$

где z_n - нули функции Бесселя $J_0(z)$. Для этого сведите $P(R)$ к отношению двух определителей, которое можно вычислить по теореме Гельфанда-Яглома.