Задачи по Квантовой Механике Весна 2015
Задание 6: Туннелирование и инстантоны в квантовой механике.

1. (5) Рассмотрите интеграл $I(\lambda)$ по вектору $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$:

$$I(\lambda) = \int e^{-S(\mathbf{x})/\lambda} d^2\mathbf{x}, \tag{1}$$

где $S(x) = -\frac{1}{2}\mathbf{x}^2 + \frac{1}{4}\left(\mathbf{x}^2\right)^2$. При малых положительных λ этот интеграл может быть вычислен в седловом приближении. Из вращательной инвариантности интеграла очевидно, что седловые точки в координатах (x_1, x_2) образуют окружность. Покажите, что при произвольном выборе какой-то одной из таких седловых точек, интеграл, отвечающий квадратичным флуктуациям вокруг неё, расходится из-за наличия нулевого собственного значения соответствующей квадратичной формы. Интеграл $I(\lambda \to +0)$, тем не менее, можно вычислить. Чему он равен?

2. (10) Рассмотрите частицу массы m в потенциале

$$U_1(x) = \frac{U_0}{2}\left[(x/x_0)^2 - \frac{1}{4}\right]^2$$

и получите амплитуду $C_1(t) = \left\langle -\frac{x_0}{2}\right| e^{-iHt} \left|\frac{x_0}{2}\right\rangle$, выразив её через энергии двух низколежащих расщеплённых уровней $E_{1,2} = E \pm \frac{\Delta E}{2}$. Найдите энергии этих уровней и их расщепление, пользуясь приближением ВКБ. При каких условиях амплитуда $C_1(t)$ определяется только двумя нижними уровнями?

3. (10) Рассмотрите метастабильное состояние частицы в потенциале

$$U_2(x) = 3U_0\,(x/x_0)^2\left[1 - \frac{2}{3}x/x_0\right]$$

и получите амплитуду $C_2(t) = \langle 0| e^{-iHt} |0\rangle$, выразив её через энергию основного состояния E и уширение этого уровня Г. Найдите это уширение, пользуясь приближением ВКБ. При каких условиях амплитуда $C_2(t)$ определяется только нижним уровнем?

4. (15) Рассмотрите расщепление уровней в потенциале $U_1(x)$ в условиях задачи 2 в одноинстантонном приближении, вычисляя $C_1(\tau)$ в мнимом времени $\tau = it$. Для этого i) получите уравнение на инстантонную траекторию и найдите его решение, отвечающее нулевой энергии, ii) найдите действие на инстантонной траектории и iii) учтите количество способов разместить инстантон во времени (без строгого вычисления флуктуационного детерминанта). Сравните полученную амплитуду с найденной в задаче 2 и получите ΔE из таких соображений. Как соотносится полученный ответ с найденным в задаче 2?

5. (15) Рассмотрите метастабильное состояние частицы массы m в потенциале $U_2(x)$ в условиях задачи 3 в одноинстантонном приближении, вычисляя $C_2(\tau)$ в мнимом времени $\tau = it$. Для этого i) получите уравнение на инстантонную траекторию и найдите его решение, отвечающее нулевой энергии, ii) найдите действие на инстантонной траектории и iii) учтите количество способов разместить инстантон во времени и количество отрицательных собственных значений в операторе, отвечающем усреднению по гауссовым флуктуациям вблизи инстантонной траектории (без строгого вычисления флуктуационного детерминанта). Сравните полученную амплитуду с найденной в задаче 3 и получите Γ из таких соображений. Как соотносится полученный ответ с найденным в задаче 3?

6. (30) Вычислите детерминант для квадратичных флуктуаций в задачах 4 и 5. Если бы не проблема с нулевой модой в функциональном интеграле (сравните с задачей 1), мы ожидали бы ответ вида:

$$\int e^{-S[x(\tau)]}\mathcal{D}x(\tau) = \sqrt{\frac{\det\left(-m\partial_\tau^2 + V(\infty)\right)}{\det\left(-m\partial_\tau^2 + V(\tau)\right)}} Z_0(\tau) e^{-S[x_c(\tau)]}, \qquad (2)$$

где $x_c(\tau)$ - инстантонное решение, а $V(\tau)$ - 'потенциал' в уравнении Шредингера, описывающем квадратичные флуктуации. Здесь определитель нормирован на 'свободный', так что:

$$Z_0(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\det\left(-m\partial_\tau^2 + V(\infty)\right)}}, \qquad (3)$$

причем $Z_0(\tau)$ известно из вычисления пропагатора гармонического осциллятора. Можно показать, что наличие нулевой моды модифицирует формулу (2) следующим образом:

$$\int e^{-S[x(\tau)]}\mathcal{D}x(\tau) = \tau\sqrt{\frac{S[x_c(\tau)]}{2\pi}}\sqrt{\frac{\det\left(-m\partial_\tau^2 + V(\infty)\right)}{\det'\left(-m\partial_\tau^2 + V(\tau)\right)}}Z_0(\tau)e^{-S[x_c(\tau)]},$$

где $\det'$ соответствует произведению ненулевых собственных значений. Используя эту формулу, запишите уточненный ответ для задач 4 и 5.