

Топологические явления в физике. Фаза Берри.

Антоненко Даниил

1 апреля 2017

Исторически понятие фазы Берри появилось в контексте адиабатического приближения в квантовой механике, но позднее стало ясно, что оно является гораздо более общим.

Фаза Берри при адиабатическом процессе (историческое введение)

Рассмотрим гамильтониан $\mathcal{H}_{\mathbf{R}}$, зависящий от набора континуальных параметров $\mathbf{R}$ и соответствующий ему базис собственных состояний, которые также зависят от $\mathbf{R}$ и перечисляются индексом n :

$$\mathcal{H}_{\mathbf{R}} |n_{\mathbf{R}}\rangle = E_{n,\mathbf{R}} |n_{\mathbf{R}}\rangle. \quad (1)$$

Предполагается, что зависимость $E_{n,\mathbf{R}}$ и $|n_{\mathbf{R}}\rangle$ от $\mathbf{R}$ является достаточно гладкой (но этого не всегда можно добиться во всей области параметров), что однозначно задает $E_{n,\mathbf{R}}$ при отсутствии вырождения. Однако выбор волновых функций по-прежнему не является однозначным, так как можно перейти к альтернативному набору, отличающемуся на фазовый множитель, который может гладко зависеть от $\mathbf{R}$: $|n_{\mathbf{R}}\rangle \rightarrow |n_{\mathbf{R}}\rangle e^{i\varphi(\mathbf{R})}$.

Ранее (см. семинар по адиабатике) мы показали, что в соответствии с адиабатической теоремой, волновая функция системы следует за собственной функцией мгновенного гамильтониана при медленном (по сравнению с расстоянием до ближайшего уровня) изменении параметров $\mathbf{R}(t)$:

$$\begin{aligned} |\psi_n(t=0)\rangle &= |n_{\mathbf{R}(0)}\rangle, \\ |\psi_n(t)\rangle &= c_n(t) \exp\left(-i \int_0^t E_{n,\mathbf{R}(t')} dt'\right) |n_{\mathbf{R}(t)}\rangle. \end{aligned}$$

Здесь был вынесен стандартный *динамический фазовый множитель* $\exp\left(-i \int_0^t E_{n,\mathbf{R}(t')} dt'\right)$, связанный с эволюцией системы во времени. Оказывается, что оставшийся коэффициент $c(t)$ также может зависеть от времени и подчиняется уравнению (см. тот же семинар):

$$\dot{c}_n(t) = -c_n(t) \left\langle n_{\mathbf{R}(t)} \left| \frac{\partial}{\partial t} \right| n_{\mathbf{R}(t)} \right\rangle.$$

Таким образом, волновая функция меняется по закону

$$|\psi_n(t)\rangle = \exp(i\gamma_n) \exp\left(-i \int_0^t E_{n,\mathbf{R}(t')} dt'\right) |\psi_n(t=0)\rangle,$$

где

$$\gamma_n = i \int^t \left\langle n_{\mathbf{R}(t')} \left| \frac{\partial}{\partial t'} \right| n_{\mathbf{R}(t')} \right\rangle dt'.$$

Величина γ_n и называется *фазой Берри*.

Фаза Берри в пространстве параметров

Путем простой замены переменных получается выражение для фазы Берри в виде контурного интеграла в пространстве параметров:

$$\gamma_n = i \int_C \langle n_{\mathbf{R}} | \nabla_{\mathbf{R}} | n_{\mathbf{R}} \rangle d\mathbf{R}.$$

Зависимость от скорости прохождения заданной траектории в пространстве параметров отсутствует, поэтому фаза Берри является *геометрическим фазовым множителем*. Он является неоднозначно определенным в связи с неоднозначностью выбора $|n_{\mathbf{R}}\rangle$. Однако, в случае замкнутого контура C фаза Берри становится куда более хорошо определенной величиной. Действительно, при замене $|n_{\mathbf{R}}\rangle \rightarrow |n_{\mathbf{R}}\rangle e^{i\varphi(\mathbf{R})}$ фаза Берри меняется, как $\gamma_{\mathbf{R}} \rightarrow \gamma_{\mathbf{R}} - \int_C d\mathbf{R} \cdot \nabla_{\mathbf{R}} \varphi(\mathbf{R})$, а интеграл от градиента равен нулю, если функция $\varphi(\mathbf{R})$ задана в односвязной области. Последнее, однако, не всегда верно.

Напомним так же, что выражение $\langle n_{\mathbf{R}} | \nabla_{\mathbf{R}} | n_{\mathbf{R}} \rangle$ является чисто мнимым (действительно, $\langle n_{\mathbf{R}} | \nabla_{\mathbf{R}} | n_{\mathbf{R}} \rangle^* = (\nabla_{\mathbf{R}} | n_{\mathbf{R}} \rangle)^+ | n_{\mathbf{R}} \rangle = -\langle n_{\mathbf{R}} | \nabla_{\mathbf{R}} | n_{\mathbf{R}} \rangle$, где было использовано интегрирование по частям). Это свойство обеспечивает вещественность γ_n , которая обеспечивает сохранение нормировки волновой функции (унитарность эволюции). Также ясно, что для волновых функций, зависящих только от координат и не несущих (псевдо)спинового индекса, фаза Берри равна нулю в том, случае, если имеется симметрия гамильтониана относительно обращения времени (так как волновые функции можно выбрать вещественными).

Полезно ввести так называемую *связность (или вектор-потенциал) Берри* $\mathbf{A}_{\mathbf{R}}$:

$$\boxed{\mathbf{A}_{\mathbf{R}} = i \langle n_{\mathbf{R}} | \nabla_{\mathbf{R}} | n_{\mathbf{R}} \rangle}, \quad (2)$$

интеграл которой по контуру дает фазу Берри: $\gamma_n = i \int_C \mathbf{A}_{\mathbf{R}} \cdot d\mathbf{R}$. Свойства связности Берри во многом аналогичны вектор-потенциалу в электродинамике¹. В частности, можно воспользоваться теоремой Стокса и записать интеграл по замкнутому контуру через интеграл по поверхности, натянутой на этот контур:

$$\gamma_n = i \int dS_{ij} \Omega_{ij},$$

$$\boxed{\Omega_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i}.$$

Величина Ω_{ij} называется кривизной Берри. Она похожа на тензор электромагнитного поля².

Вычисление фазы Берри для двухуровневой системы

Рассмотрим двухуровневую систему, заданную гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

Он зависит от трех параметров d_x, d_y, d_z (постоянный сдвиг энергии не представляет интереса). Поэтому можно ввести векторное представление для кривизны Берри (аналог магнитного поля): $(\boldsymbol{\Omega})_i = \epsilon_{ijk} \Omega_{jk}$. Здесь

$$\boldsymbol{\Omega} = \text{rot} \mathbf{A}.$$

Перейдем к сферическим координатам: $\mathbf{d} = d (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$. Уровни энергии равны $E_{\pm} = \pm d$. Из стандартного курса квантовой механики известны собственные вектора (их можно получить, подействовав матрицей поворота на собственные состояния $(1 \ 0)^T$ и $(0 \ 1)^T$ при $d_x = d_y = 0$). Для состояния с отрицательной энергией собственный вектор имеет вид (обратите внимание на то, что эта параметризация не является гладкой по параметрам θ, φ при $\theta \rightarrow \pi$):

$$|-\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Из определения (2) получаем для связности Берри в координатах (d, θ, φ) :

$$A_d = 0, \quad A_{\theta} = 0, \quad A_{\varphi} = \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Для кривизны Берри в векторной форме:

$$\Omega_d = \frac{1}{2} \sin \theta, \quad \Omega_{\theta} = 0, \quad \Omega_{\varphi} = 0.$$

Мы видим, что $\boldsymbol{\Omega} \parallel \mathbf{d}$. Вернемся к исходной системе координат (d_x, d_y, d_z) . Тонкость состоит в том, что $\boldsymbol{\Omega}$ — аксиальный вектор (псевдовектор), поэтому следует разделить на якобиан преобразования $J = d^2 \sin \theta$:

$$\boxed{\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{d}}{d^3}}.$$

Те, кто забыл это правило работы в криволинейной системе координат, могут преобразовывать Ω в тензорной форме: направим ось z вдоль $\mathbf{d}$, вычислим $\Omega_{d_x, d_y} = \frac{\partial(\theta, \varphi)}{\partial(d_x, d_y)} \Omega_{\theta, \varphi}$.

¹а также связности (символам Кристоффеля) в теории гравитации.

²и на тензор кривизны в римановой геометрии.

Для рассматриваемой системы кривизна Берри $\text{rot}\mathbf{A} = \langle \nabla\psi | \times | \nabla\psi \rangle$ меняется в пространстве параметров $\mathbf{B}$ по такому же закону, как и магнитное поле, создаваемое магнитным монополем с зарядом $1/2$, расположенным в начале координат. На языке спина начало координат отвечает нулевому $\mathbf{B}$, при этом возникает вырождение уровней.

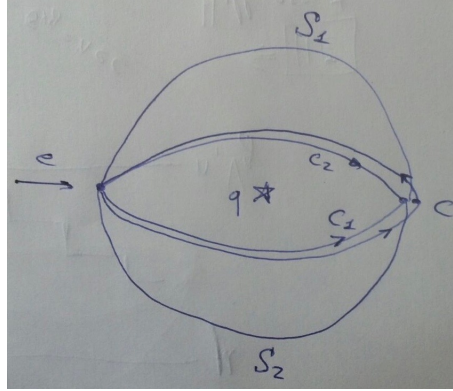
Последнее наблюдение позволяет вычислить фазу Берри вдоль заданного контура, как половину телесного угла, охватываемого контуром на единичной сфере, заданным вектором $\mathbf{d}/d$. Контур разбивает сферу на две части и для вычисления телесного угла можно брать любую половину: ответы для фазы Берри будут отличаться на $4\pi/2 = 2\pi$ и будут физически эквивалентны.

1D топологические изоляторы. Фаза Берри в SSH модели

Вспомним SSH модель. Каждому квазиимпульсу k соответствует вектор $\mathbf{d}$, задающий гамильтониан $\mathcal{H} = \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\sigma}$. Так как конечные точки зоны Бриллюэна $k \in [-\pi, \pi]$ отождествляются, то можно рассмотреть фазу Берри вдоль контура, задаваемого блоховским гамильтонианом. Вспомнив его явный вид, получим, что в топологической фазе $\mathbf{d}/d$ очерчивает экватор на сфере и соответствующая фаза Берри равна $(\pm)\pi$, а в тривиальной фазе она равна нулю. Таким образом, топологическое число выражается через фазу Берри³.

Рассуждение Дирака о монополе (отступление №1)

Все имеющиеся наблюдения свидетельствуют о том, что электрический заряд в нашей вселенной квантуется со значением кванта, равным элементарному заряду e . При этом не существует убедительного теоретического обоснования этого факта, так как структура электродинамики (как классической, так и квантовой) допускает существование произвольных зарядов⁴. Однако, как показал Дирак, корректное введение в теорию магнитных монополей возможно лишь в случае квантования электрического и магнитного зарядов.



Действительно, рассмотрим магнитный монополь и опыт по типу Ааронова-Бома (см. рисунок), в котором частица с зарядом e может распространяться вдоль двух интерферирующих траекторий C_1 и C_2 вблизи монополя, так что полная квантовомеханическая амплитуда перехода есть сумма амплитуд перехода вдоль каждого из путей (предполагается, что пути дают одинаковый вклад): $a = a_1 + a_2$. Амплитуда вдоль каждого из пути есть e^{iS} (см. семинар по интегралам по траекториям). Из курса классической электродинамики известно, что вклад в действие, описывающий взаимодействие частицы с полем дается слагаемым $S_{\text{int}} = e/c \int \mathbf{A} d\mathbf{r}$, где $\mathbf{A}$ — вектор-потенциал. Таким образом, амплитуда перехода

$$A = c_1 e^{\frac{ie}{\hbar} \int_{C_1} \mathbf{A} d\mathbf{r}} + c_2 e^{\frac{ie}{\hbar} \int_{C_2} \mathbf{A} d\mathbf{r}} = c_1 e^{i\varphi} \left(1 + e^{\frac{ie}{\hbar} \int_C \mathbf{A} d\mathbf{r}} \right),$$

где предполагалось, что c_1 и c_2 одинаковы по модулю. $C = C_1 - C_2$ — замкнутый контур, а φ — несущественный фазовый множитель. Именно интеграл вектор-потенциала вдоль контура C является наблюдаемым и зависит от магнитного поля.

Для вычисления $\varphi_{\mathbf{A}} = e/(\hbar c) \int_C \mathbf{A} d\mathbf{r}$ воспользуемся теоремой Стокса, выражающей эту величину как интеграл от магнитного поля по поверхности. Рассмотрим две поверхности S_1 и S_2 , натянутые на C так, что их объединение $S = S_1 + S_2$ — замкнутая поверхность, содержащая монополь, а ориентация задается внешней нормалью. Тогда два способа вычисления дают:

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{A}}^{(1)} &= \frac{e}{\hbar c} \int_{S_1} \mathbf{B} d\mathbf{S} \\ \varphi_{\mathbf{A}}^{(2)} &= -\frac{e}{\hbar c} \int_{S_2} \mathbf{B} d\mathbf{S} \end{aligned}$$

³здесь мы не рассматриваем случаи, когда число намоток превышает единицу.

⁴в обобщениях КЭД, описывающих сильные и слабые взаимодействия (теории Янга-Миллса) квантование соответствующих 'зарядов' является непосредственным следствием теории. Выделенность электродинамики обусловлена простотой ее калибровочной группы $U(1)$, которая является абелевой.

Разница в ответах для фаз:

$$\varphi_{\mathbf{A}}^{(1)} - \varphi_{\mathbf{A}}^{(2)} = \frac{e}{c\hbar} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \frac{4\pi e q}{c\hbar},$$

где q — заряд монополя.

Мы получили, что для совпадения ответов для фаз $\varphi_{\mathbf{A}}^{(1)} = \varphi_{\mathbf{A}}^{(2)}$, монополю должен отсутствовать. К счастью, фаза определена с точностью до 2π , поэтому достаточно условия $\varphi_{\mathbf{A}}^{(1)} - \varphi_{\mathbf{A}}^{(2)} = 2\pi n$, что приводит к требованию:

$$eq = \frac{c\hbar}{2}.$$

Таким образом существование хотя бы одного магнитного монополя требует квантования электрического заряда.

Можно помыслить пару монополей, соединенных между собой очень тонкой трубкой магнитного потока (так называемая Дираковская струна).

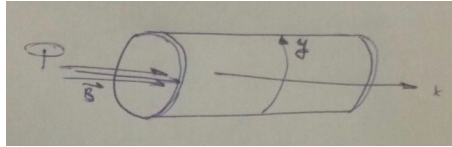
Отсутствие глобально определенного вектор-потенциала

Пример Дирака с монополем является хорошей иллюстрацией того, что на некоторых многообразиях существуют полевые конфигурации, которые не допускают выбора глобально хорошо определенного вектор-потенциала (в последнем случае многообразие — это трехмерное пространство с выколотой точкой). При этом можно покрыть многообразие атласом из карт, в каждой из которых вектор-потенциал хорошо определен, а на пересечении карт он отличается калибровочным преобразованием.

Многообразия характеризуются *классами Черна*, которые определяют наличие таких нетривиальных конфигураций. На заданном многообразии каждая полевая конфигурация характеризуется определенным топологическим *числом Черна*, характеризующим препятствия к построению соответствующего ей глобального вектор-потенциала. Математически строгим описанием этих сущностей занимается теория *векторных (или линейных) расслоений*.

2D топологические явления. Аргумент Лафлина с потоком

Популярный аргумент Лафлина позволяет доказать, что двумерный *изолятор* ($\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$), в котором нет квазичастиц с дробным зарядом, обладает поперечной проводимостью σ_{xy} , квантованной в единицах кванта кондактанса⁵: $\sigma_{xy} = G_Q \cdot l$, $G_Q = e^2/(2\pi\hbar)$.



Рассмотрим двумерный изолятор, свернутый в цилиндр радиуса r . Направим ось x вдоль оси цилиндра, ось y — вокруг основания (вдоль этой оси будут периодические граничные условия $2\pi r \cdot k_y = 2\pi n$). Пусть этот цилиндр пронизывает воображаемый соленоид с магнитным потоком Φ . В самом изоляторе магнитное поле отсутствует, однако наличие магнитного потока скажется на граничных условиях для y -компоненты квазиимпульса. Выберем вектор-потенциал чисто тангенциальным, $A_y = \Phi/(2\pi r)$. Условие квантования модифицируется: $2\pi r \cdot (k_y + eA_y/c) = 2\pi n$. Тогда $k_y = n/r + e\Phi/(2\pi cr) = (n + \Phi/\Phi_q)/r$, где $\Phi_q = 2\pi\hbar c/e$ — квант магнитного потока. Таким образом, пропускание целого числа квантов магнитного потока не меняет граничные условия.

Рассмотрим процесс, в котором магнитный поток $\Phi(t)$ меняется со временем от нуля до значения кванта Φ_q . С одной стороны, изменение потока индуцирует электрическое поле, направленное вдоль оси x . В соответствии с законом Фарадея, соответствующая ЭДС $\mathcal{E}_y = \dot{\Phi}/c$. Так как $\sigma_{yy} = 0$ (и это важно!), она вызывает ток только в перпендикулярном направлении: $I_x = \sigma_{xy}\mathcal{E}_y$. Полный протекший заряд равен $Q = \int I dt = \sigma_{xy}/c \int \dot{\Phi} dt = \sigma_{xy}\Phi_q/c$. Протекшие заряды скапливаются на основаниях и не могут рекомбинировать, так как рассматривается вещество-изолятор!

С другой стороны, к концу процесса граничные условия возвращаются в исходное состояние и все, что могло измениться — это лишь заселенности состояний квазичастиц. Таким образом, для того, чтобы заряд мог накопиться на основаниях, они должны обладать *краевыми состояниями*. (Если краевых состояний нет, то $\sigma_{xy} = 0$.) Так как мы предполагаем, что заряд всех квазичастиц кратен элементарному заряду e , то отсюда следует, что $Q = le$, где l — целое число. Тогда $\sigma_{xy} = le c/\Phi_q = le^2/(2\pi\hbar) = G_Q \cdot l$.

Краевые состояния такого типа называют *киральными* (chiral), так как они переносят заряд только в одном направлении. Они должны быть бесщелевыми для того, чтобы осуществлять транспорт. Транспорт заряда является нелокальным (так как происходит вдоль узкого канала вблизи границы).

⁵кондактанс — это величина, обратная сопротивлению. Двумерная проводимость (она же — проводимость на квадрат) не зависит от размера квадрата и имеет размерность кондактанса.

TKNN инвариант. Двумерный ”черновский“ топологический изолятор

Покажем, что поперечная проводимость σ_{xy} изолятора задается топологическим числом, равным интегралу от кривизны Берри по всей зоне Бриллюэна (подразумевается суммирование по заполненным зонам), который называется TKNN (Thouless-Kohmoto-Nightingale-den Nijs) инвариантом:

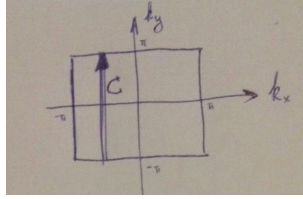
$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} \frac{1}{2\pi} \int dk_x dk_y \Omega(k_x, k_y). \quad (3)$$

На первый взгляд может показаться, что интеграл от ротора по замкнутой поверхности всегда должен зануляться, однако это не так в связи с тем, что может не существовать глобально определенной гладкой связности Берри, соответствующей заданной кривизне. Об этом говорилось выше и было проиллюстрировано на примере Дираковского монополя и спина $1/2$ в магнитном поле.

Для вывода TKNN формулы воспользуемся топологическими соображениями. Заметим, что, если менять собственные энергии блоховского гамильтониана, не меняя собственных векторов и не закрывая щель, то не будет меняться ни правая часть (3) (она зависит только от собственных векторов, но не значений), ни левая, которая согласно аргументу Лафлина является квантованным числом и не может изменяться при непрерывных деформациях. Таким образом, непрерывной деформацией сделаем рассматриваемые зоны полностью плоскими, то есть такими, чтобы энергии не зависели от квазиимпульса. Это прием называется уплощение зон (band flattening).

В системах с плоскими зонами благодаря вырождению Фурье-преобразованные блоховские состояния (так называемые состояния Ванье), также будут собственными для гамильтониана. Сделаем такое преобразование по одной из координат и рассмотрим волновую функцию, локализованную в x направлении:

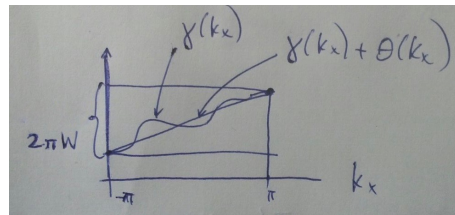
$$|n, k_y\rangle = \sum_{k_x} e^{ik_x n} |k_x, k_y\rangle. \quad (4)$$



Такие состояния локализованы вдоль координаты x в размерах порядка одной элементарной ячейки. Проведем мысленный эксперимент Лафлина с адиабатическим пропусканием, пропустив число квантов потока, равное числу элементарных ячеек вдоль направления y ⁶. В таком эксперименте, k_y сделает полный цикл по зоне Бриллюэна (см. рис.) и каждая $|k_x, k_y\rangle$ компонента в разложении (4) получит фазовый множитель, содержащий как динамическую составляющую $\Theta(k_x) = -\int dt E_{k_x, k_y}(t)$, так и геометрическую фазу Берри $\gamma_C(k_x)$, В результате после эволюции будем иметь:

$$|n, k_y\rangle_{N_y \cdot \Phi_0} = \sum_k e^{ikn} e^{i\gamma_C(k_x) + i\Theta(k_x)} |k_x, k_y\rangle.$$

Заметим, что благодаря тому, что может не существовать единой гладкой связности Берри на всю зону Бриллюэна, может быть так, что $\gamma_C(k_x = -\pi) \neq \gamma_C(k_x = \pi)$ (при этом всегда $\Theta(k_x = -\pi) = \gamma_C(\Theta = \pi)$, так как динамические фазы определяются только энергиями). Пусть $\gamma_C(k_x = \pi) - \gamma_C(k_x = -\pi) = 2\pi W$. Зависимость $\gamma(k_x)$ не обязана быть линейной, однако мы можем еще раз поменять собственные энергии гамильтониана и подобрать $\Theta(k_x)$, добившись линейной зависимости от k_x суммы динамической и геометрической фаз: $\gamma(k_x) + \Theta(k_x) = W \cdot k_x$ (см. рис.).



Тогда

$$|n, k_y\rangle_{N_y \cdot \Phi_0} = \sum_k e^{ikn} e^{iW k_x} |k_x, k_y\rangle.$$

⁶ альтернативным способом является пропускание одного кванта потока, но в системе, содержащей ровно одну элементарную ячейку вдоль оси y , как бы дико это не звучало.

Состояние переместилось на W элементарных ячеек. Для каждой координаты n вдоль x имеется N_y состояний (N_y — число элементарных ячеек вдоль y), поэтому полный перенесенный заряд равен WN_y (но и пропущено было $N_y\Phi_0$ квантов потока). Из аргумента Лафлина следует квантование W и формула TKNN. Действительно, по теореме Стокса

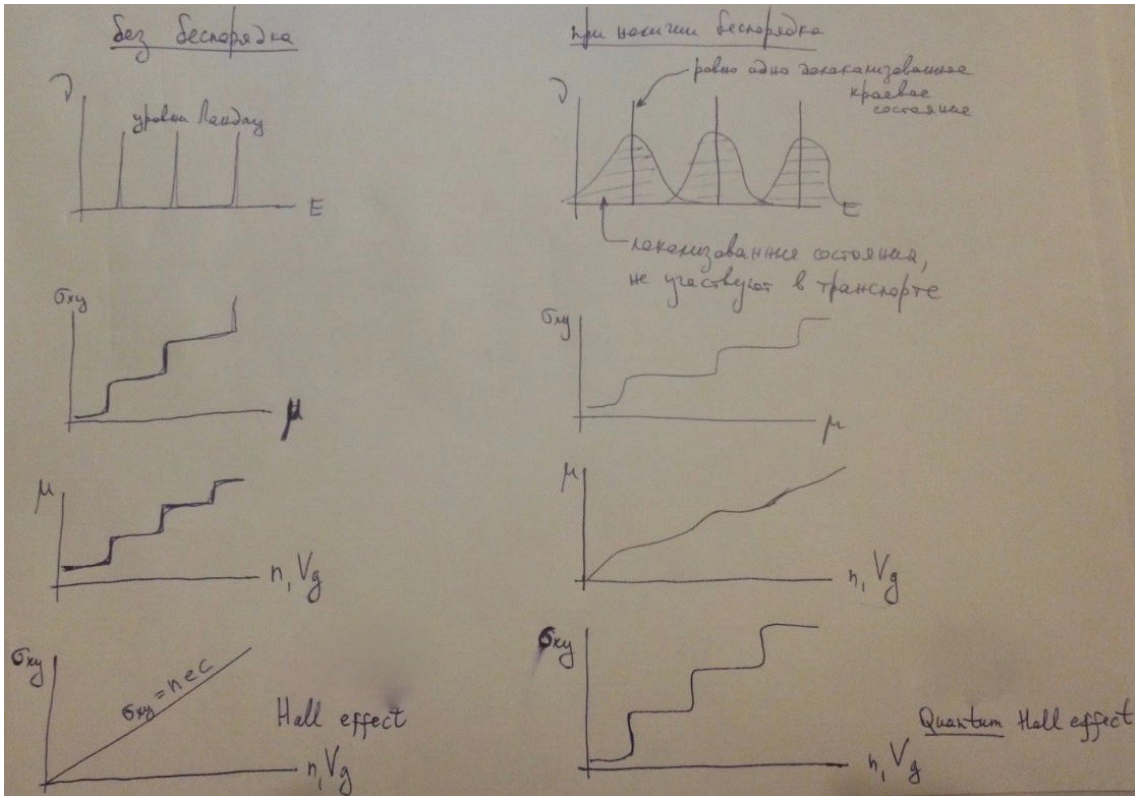
$$W = \frac{1}{2\pi} [\gamma_C(k_x = \pi) - \gamma_C(k_x = -\pi)] = \frac{1}{2\pi} \int dk_x dk_y \Omega(k_x, k_y).$$

Топологические изоляторы с ненулевым TKNN инвариантом называются Черновскими изоляторами и встречаются в системах с нарушенной симметрией по отношению к обращению времени.

Квантовый эффект Холла (отступление №2)

К классу двумерных топологических $\mathbb{Z}$ -изоляторов без симметрии по обращению времени (изолятор Черна) традиционно относят квантовый эффект Холла. Между тем, “настоящий” квантовый эффект Холла — это более сложное явление, для которого существенными являются непертурбативные эффекты, связанные с наличием беспорядка в системе (случайные примеси, дислокации решетки и пр.). Попробуем с этим разобраться.

Рассмотрим в начале систему без беспорядка. Как известно, газ свободных фермионов в магнитном поле описывается последовательностью сильно вырожденных уровней Ландау, которые в большей или меньшей степени заполнены частицами. Плотность состояний состоит из последовательности дельта-функций (см. рис.). Такая система действительно представляет собой зонный изолятор, если уровень Ферми находится в щели. Непосредственным вычислением можно получить, что топологическое число (и, следовательно поперечная проводимость σ_{xy} в единицах кванта проводимости) равняется количеству заполненных уровней Ландау. Из этого следует, что зависимость σ_{xy} от химпотенциала μ представляет собой ступенчатую функцию, что иногда ошибочно считают объяснением квантового эффекта Холла.



На самом деле, в эксперименте наблюдается ступенчатая зависимость σ_{xy} не от μ , а от затворного напряжения под исследуемым двумерным образцом, которое определяет заряд в нем и, следовательно, концентрацию n (представьте, что система затвор-образец — это конденсатор, на который подано фиксированное напряжение). Зависимость химпотенциала от концентрации также представляет собой ступенчатую функцию. При этом зависимость σ_{xy} от концентрации n вовсе не обязана быть ступенчатой. Можно показать прямым вычислением, что она является линейной и в классическом (дрейфующие орбиты) и в квантовом случаях; этот результат является достаточно устойчивым по отношению к пертурбативным поправкам при введении беспорядка.

Для объяснения квантового эффекта Холла необходимо рассматривать непертурбативные эффекты разупорядочения. При этом плотность состояний размывается до некоторого распределения (зоны даже могут начать перекрываться). Практически все состояния не участвуют в транспорте в пределе нулевой температуры, так как соответствующие волновые функции являются связанными состояниями. Они локализованы в пространстве и имеют экспоненциально затухающие хвосты.

Вместе с тем, от каждого уровня Ландау остается ровно одно краевое делокализованное состояние, которое и обеспечивает поперечную проводимость. При этом ток течет вдоль одномерной границы образца в фиксированном направлении⁷.

Знаменательным является то, что в квантовом эффекте Холла наблюдается квантование проводимости с точностью до 10^{-8} при наличии в системе существенного беспорядка, который не ухудшает наблюдаемый эффект, а, напротив, его определяет.

Аномальная скорость

Вспомним классические уравнения движения частицы в электрическом $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ и магнитном $\mathbf{B}$ полях (в стандартных обозначениях):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}} &= e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}], \\ \dot{\mathbf{x}} &= \frac{1}{m} \mathbf{p}.\end{aligned}$$

Обобщая на случай произвольной дисперсии $\varepsilon(\mathbf{p})$ и вводя полную энергию $\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p}) + e\varphi(\mathbf{x})$, запишем уравнения движения в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{B}], \\ \dot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{p}}.\end{aligned}$$

В таком виде они представляют собой уравнения Гамильтона с "дополнительным членом", зависящим от магнитного поля. Формула несимметрична и наводит на мысль о том, что и в производную по времени от координаты также может существовать дополнительный вклад. Оказывается, что в системах (например, для квазичастиц) с ненулевой кривизной Берри Ω так и происходит:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{B}], \\ \dot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{p}} + [\dot{\mathbf{p}}, \Omega].\end{aligned}\tag{5}$$

Существуют разные способы вывода этих уравнений. Популярностью пользуется вариационный подход. Также можно рассмотреть эволюцию волнового пакета в элтекрическом поле на небольших временах, как это предлагается сделать в домашнем задании.

Свойства кривизны Берри по отношению к обращению времени

Выведем свойства кривизны Берри по отношению к обращению времени. Очень просто получить их из уравнений (5). Действительно, так как при обращении времени $\dot{\mathbf{x}} \rightarrow -\dot{\mathbf{x}}$, $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$, $\dot{\mathbf{p}} \rightarrow \dot{\mathbf{p}}$ и, следовательно, $\Omega \rightarrow -\Omega$. Учитывая зависимость Ω от квазиимпульса, получим, что в системе, обладающей симметрией по отношению к обращению времени

$$\boxed{\Omega(\mathbf{p}) = -\Omega(-\mathbf{p})}.\tag{6}$$

Топологические изоляторы в Т-инвариантных и Т-неинвариантных системах

В Т-инвариантных изоляторах свойство (6) приводит к тому⁸, что интеграл от кривизны Берри по всей зоне Бриллюэна равен нулю, что в соответствии с результатом TKNN означает, что $\sigma_{xy} = 0$ и нет киральных краевых состояний. Последнее очевидно уже и из того, что они обладают выделенным направлением движения и не обладают соответствующим партнером, движущимся в противоположном направлении.

Оказывается однако, что и в таких изоляторах могут существовать топологически защищенные краевые моды, причем они разбиваются на пары, в которых транспорт осуществляется в противоположных направлениях. Они называются спиральными (helical), в отличие от киральных. Простейшей моделью такой системы является комбинация двух квантовохолловных систем,

⁷понятно, что такой транспорт будет обладать особыми свойствами в силу своей нелокальности, что было продемонстрировано экспериментально, например, в четырехточечной системе измерений.

⁸здесь приведены несколько упрощенные рассуждения. Более детальное изложение см., например, в книге Bernevig'a

в котором частицы со спином вверх и вниз двигаются в противоположных направлениях (квантовый спиновый эффект холла, QSHE). В присутствии спин-орбитального взаимодействия и других членов в гамильтониане настоящий спин перестает быть хорошим квантовым числом, но краевые состояния могут оставаться в наличии благодаря их топологической защите, а роль спина занимает псевдоспин. Топологический инвариант в Т-инвариантных системах является $\mathbb{Z}_2$ -инвариантом, принимающим только два значения.