

Задачи к семинару «Открытые двухуровневые системы»

21 февраля 2018 г.

Задача 1. Флуктуационно-диссипационная теорема (15 баллов)

Вне зависимости от происхождения индуцированного окружающей средой шума $\hat{X}(t)$, на его корреляционные функции можно вывести соотношения самого общего вида, используя лишь следующие общие предположения: гамильтониан $\hat{H}_e$ не зависит от времени; и матрица плотности окружающей среды имеет вид $\hat{\rho}_e = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}_e}$.

1. Рассмотрите следующие две корреляционные функции:

$$S_{>}(t_1 - t_2) = \langle \hat{X}(t_1) \hat{X}(t_2) \rangle, \quad S_{<}(t_1 - t_2) = \langle \hat{X}(t_2) \hat{X}(t_1) \rangle = S_{>}(t_2 - t_1) \quad (1)$$

Используя формальное сходство между матрицей плотности и оператором эволюции в мнимом времени, покажите, что эти функции связаны соотношением $S_{<}(t) = S_{>}(t - i\beta)$. Что это означает для их фурье-образов, $S_{<}(\omega)$ и $S_{>}(\omega)$?

2. Определим «спектральную плотность» как $J(\omega) = \frac{1}{2}(S_{>}(\omega) - S_{<}(\omega))$, и Келдышевский коррелятор как $S_K(t_1 - t_2) = \langle \{ \hat{X}(t_1), \hat{X}(t_2) \} \rangle$. Как связаны $S_K(\omega)$ и $J(\omega)$?
3. Продемонстрируйте эти соотношения на примере исследуемого в семинаре «шума» $\hat{X}(t) = \sum_n \lambda_n (\hat{a}_n + \hat{a}_n^\dagger)$.

Задача 2. Релаксация (20 баллов)

Полученное на семинаре время релаксации T_1 для спин-бозонной модели, описываемой гамильтонианом

$$\hat{H} = \sum_n \omega_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \frac{\Delta}{2} \hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_x \sum_n \lambda_n \hat{X}_n, \quad \hat{X}_n = a_n + a_n^\dagger, \quad (2)$$

можно просто интерпретировать на языке золотого правила Ферми.

1. Считая, что все осцилляторы находятся в квантовом состоянии с фиксированными числами заполнения n_k , вычислите частоту переходов $w_{i \rightarrow f} = w_{\uparrow \rightarrow \downarrow}$ и $w_{\downarrow \rightarrow \uparrow}$.
2. Проведите усреднение полученных величин по Гиббсовскому ансамблю для осцилляторов $\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}}$.

Задача 3. Чистая дефазировка (50 баллов)

Исследуйте эволюцию матрицы плотности двухуровневой системы, взаимодействующую с резервуаром (набором осцилляторов). Система описывается следующим гамильтонианом:

$$\hat{H} = \frac{\Delta}{2} \hat{\sigma}_z + \sum_n \omega_n (\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \frac{1}{2}) + \hat{\sigma}_z \sum_n \lambda_n \hat{X}_n, \quad \hat{X}_n = \hat{b}_n + \hat{b}_n^\dagger \quad (3)$$

1. Перейдите к представлению взаимодействия. Оператор эволюции в представлении взаимодействия записывается при помощи $\mathcal{T}$ -упорядоченной экспоненты:

$$\hat{S}(t, t_0) = \mathcal{T} \exp \left(-i \int_{t_0}^t \hat{V}(\tau) d\tau \right) \quad (4)$$

Гамильтониан в различные моменты времени не коммутирует сам с собой, поэтому $\mathcal{T}$ -упорядочение убрать нельзя. Однако задачу можно значительно упростить, используя тот факт, что гамильтониан в различные моменты времени коммутирует на число:

$$[\hat{V}(t_1), \hat{V}(t_2)] = i\phi(t_1 - t_2) \quad (5)$$

Используя этот факт, покажите, что знак $\mathcal{T}$ -упорядочения можно снять ценой дополнительной добавки:

$$\hat{S}(t, t_0) = e^{i\Phi(t-t_0)} \exp \left(-i \int_{t_0}^t \hat{V}(\tau) d\tau \right) \quad (6)$$

Указание: это соотношение можно вывести «по индукции», рассмотрев $\hat{S}(t + \delta t, t_0) = \hat{S}(t + \delta t, t)\hat{S}(t, t_0)$ для $\delta t \rightarrow 0$, и объединив экспоненты при помощи формулы **Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа**:

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = \exp\left(\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]\right), \quad [\hat{A}, \hat{B}] = \text{const} \quad (7)$$

2. Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ матрица плотности системы имела вид $\hat{\rho}_{tot}(t_0) = \hat{\rho}_s(t_0) \otimes \hat{\rho}_e(t_0)$, и резервуар находится в равновесии при температуре T : $\hat{\rho}_e(t_0) = \frac{1}{Z}e^{-\beta \hat{H}_0^{(e)}}$. Вычислите редуцированную матрицу плотности в произвольный момент времени:

$$\hat{\rho}_s(t) = \text{Tr}_e\left(\hat{S}(t, t_0)\hat{\rho}_s(t_0)\hat{\rho}_e\hat{S}(t_0, t)\right) \quad (8)$$

Указание: для усреднения по степеням бани вам может пригодиться полезное тождество, которое работает при усреднении как по основному состоянию, так и по равновесному состоянию невзаимодействующих осцилляторов при произвольной температуре¹:

$$\langle e^{\alpha \hat{a} + \beta \hat{a}^\dagger} \rangle = \exp\left(\frac{1}{2} \langle (\alpha \hat{a} + \beta \hat{a}^\dagger)^2 \rangle\right) \quad (9)$$

Для доказательства этого соотношения вам может пригодиться базис когерентных состояний осциллятора и формула Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа.

3. Поскольку величина $\hat{\sigma}_z$ в данной задаче коммутирует с гамильтонианом, никакой релаксации наблюдаться не будет. Поэтому вся динамика сведётся к следующей временной зависимости матрицы плотности:

$$\hat{\rho}_s(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \cdot \exp(-\Gamma(t)) \\ \rho_{21} \cdot \exp(-\Gamma(t)) & \rho_{22} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Найдите выражение для **функции декогеренции** $\Gamma(t)$.

Задача 4 (15 баллов)

Используя функцию декогеренции из предыдущей задачи:

$$\Gamma(t) = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty d\omega J(\omega) \coth \frac{\omega}{2T} \frac{1 - \cos \omega t}{\omega^2}, \quad (11)$$

исследуйте декогеренцию для омической бани, с модельной функцией $J(\omega) = \pi \alpha \omega e^{-\omega/\omega_c}$. Тут ω_c выступает в роли экспоненциальной ультрафиолетовой обрезки, и можно считать $\omega_c \gg T$.

Указание: для вычисления удобно отделить вклад чисто квантовых флуктуаций (при $T = 0$), который зависит от обрезки ω_c ; а затем найти «температурный» вклад, для которого обрезку уже можно выбросить.

¹Это тождество является следствием теоремы Вика; в более общем виде оно гласит — если произвольная величина A имеет гауссову статистику, то $\langle e^A \rangle = e^{\langle A^2 \rangle / 2}$