

Задачи к семинару «Модель Калдейры-Леггетта»

Задача 1. Модель Рубина (это фамилия) (25 баллов)

Рассмотрите тяжёлую частицу массы M , которая соединена с баней, моделируемой одномерным полубесконечным кристаллом. В гармоническом приближении, система описывается следующим гамильтонианом:

$$H = \frac{\hat{P}^2}{2M} + V(\hat{X}) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\hat{p}_n^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} (\hat{u}_{n+1} - \hat{u}_n)^2 \right) + \frac{m\omega_0^2}{2} (\hat{X} - \hat{u}_1)^2 \quad (1)$$

Вычислите явный вид спектральной плотности $J(\omega)$, а также вид «диссипативного» ядра $\gamma(t)$.

Задача 2. Кинетическое уравнение (35 баллов)

В рамках приближения Борна-Маркова выведите уравнение на координатную матрицу плотности $\rho(x, x', t) = \langle x | \hat{\rho}(t) | x' \rangle$ в модели Калдейры-Леггетта с омической баней¹

Задача 3. Расплывание волнового пакета (что, опять?) (40 баллов)

Упражнение. Преамбула (5 баллов) Как известно из квантовой механики, волновые пакеты имеют обыкновение расплываться. С другой стороны, как известно, электрон имеет массу $m = 9.1 \cdot 10^{-28} \text{g}$, и его «классический радиус» $x_0 \simeq 10^{-13} \text{cm}$ (определяемый как его комптоновская длина волны). Пусть в начальный момент времени электрон представлял собой ровно такой волновой пакет:

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi^{1/4} x_0^{1/2}} e^{-x^2/2x_0^2} \quad (2)$$

Найдите его ширину через время $t = 1 \mu\text{s}$.

Задача (35 баллов) В предыдущем упражнении вы должны были получить ответ, который должен был вас удивить и насторожить. Рассмотрите теперь движение свободного электрона ($V_{\text{eff}}(X) = 0$), взаимодействующего с окружающей средой в рамках модели Калдейры-Леггетта с омической баней. Получите асимптотические выражения для $\langle \hat{x}^2(t) \rangle$ в следующих режимах:

- Классическая диффузия: $Tt \gg 1$
- Квантовая диффузия: $Tt \ll 1$

Чтобы не рассматривать «баллистические» эффекты, оценённые в «преамбуле», можете также считать $\omega_c \gg \gamma \gg t^{-1}$.

(5 баллов) Оцените для каких-нибудь разумных чисел, взятых из справочной литературы, при каких временах какой режим реализуется.

¹ Данное уравнение, после преобразования Вигнера, является квантомеханическим обобщением уравнения Фоккера-Планка