Задачи к семинару «Функциональный интеграл»

Упражнение (10 баллов)

Восстановите координатную зависимость пропагатора квантового гармонического осциллятора $G(x, y, T)$. Исходя из полученного выражения, найдите его спектр.

Задача 1. Пропагатор свободной частицы (15 баллов)

Вычислите интеграл для запаздывающего пропагатора свободной частицы явно, используя дискретизацию по времени:

$$G(x, y, t > 0) \underset{\epsilon \to 0}{=} \left(\frac{m}{2\pi i \epsilon}\right)^{N/2} \int \prod_{k=1}^{N-1} dx_k \exp\left(i\epsilon \sum_{k=1}^{N} \frac{m}{2} \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{\epsilon}\right)^2\right), \quad x_0 \equiv x, \quad x_N \equiv y \tag{1}$$

Задача 2. Частица в магнитном поле (50 баллов)

Вычислите пропагатор квантовой частицы, движущийся в плоскости в постоянном магнитном поле B, перпендикулярном этой плоскости ($\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$):

$$G(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, T) = \int_{\boldsymbol{r}(0)=\boldsymbol{R}_1}^{\boldsymbol{r}(T)=\boldsymbol{R}_2} \mathcal{D}[\boldsymbol{r}(t)] \exp\left(\frac{i}{2\hbar} \int_0^T \left[m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{e}{c} B(x\dot{y} - y\dot{x})\right] dt\right) \tag{2}$$

(сперва убедившись, что данное действие действительно описывает именно эту систему). Используя функцию Грина, найдите спектр соответствующей квантовой задачи (решение которой, напомним, даётся макроскопически вырожденными *уровнями Ландау*).

Подсказка: хотя этот интеграл можно вычислить и непосредственно, может оказаться удобным переход во «вращающуюся систему отсчёта» — провести следующую замену в функциональном интеграле:

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t)\cos\Omega t + y(t)\sin\Omega t \\ y'(t) &= -x(t)\sin\Omega t + y(t)\cos\Omega t \end{cases} \tag{3}$$

и при правильном выборе частоты Ω, задача значительно упрощается. Не забудьте о модификации граничных условий из-за такой замены!

Задача 3. «Мацубаровский» функциональный интеграл (25 баллов)

Рассмотрите квантовую частицу, описываемую гамильтонианом $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$. Если такая частица находится в равновесии при температуре $T = \beta^{-1}$, её матрица плотности имеет вид $\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}}$, и её статсумма

$$Z = \mathrm{Tr}(e^{-\beta \hat{H}}) \tag{4}$$

Используя аналогию между равновесной матрицей плотности и оператором эволюции в мнимом времени $t = -i\tau \Rightarrow \hat{U}(t) = e^{-\hat{H}\tau}$, постройте представление функционального интеграла для статсуммы Z. Покажите, что интегрирование должно проводиться по всем траекториям в мнимом времени $x(\tau)$, которые периодичны в мнимом времени: $x(\tau + \beta) \equiv x(\tau)$. Полученное выражение при этом должно получаться формальной заменой $t = -i\tau$ в исходном выражении (такая формальная замена носит название *Виковского поворота*).