Запаздывающая функция Грина

В данном семинаре мы построим представление запаздывающего пропагатора — амплитуды распространения квантомеханической частицы из точки $\boldsymbol{x}$ в точку $\boldsymbol{y}$ за время T через функциональный интеграл:

$$G^R(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},T>0) \equiv \langle \boldsymbol{y}|\,\hat{U}(T)\,|\boldsymbol{x}\rangle \tag{1}$$

Временная дискретизация и оператор эволюции

Для удобства предположим, что в гамильтониане импульс и координата разделяются; тем самым, гамильтониан имеет вид $H(x,p) = K(p) + V(x)$ (кинетическая и потенциальные энергии)[1]. Разобьём отрезок времени длины T на $N \to \infty$ одинаковых кусочков размера $\epsilon = \frac{T}{N} \to 0$, и представим оператор эволюции в виде $\hat{U}(T) = \prod_{i=1}^{N} \hat{U}(\epsilon)$. В свою очередь, эволюцию на бесконечно малое время ϵ можно записать в виде[2] $\hat{U}(\epsilon \to 0) = e^{-i\hat{H}\epsilon} \simeq e^{-i\hat{V}\epsilon}e^{-i\hat{K}\epsilon}$. Тем самым, мы получаем выражение для оператора эволюции в виде произведения $2N$ множителей. Удобно каждому из них «приписать» своё время $t_k = k\epsilon$ (оно было бы, если бы мы рассматривали гамильтониан, зависящий от времени):

$$\hat{U}(t) \underset{\epsilon\to 0}{=} \underbrace{e^{-i\hat{V}\epsilon}e^{-i\hat{K}\epsilon}}_{t=t_N=T}\cdot\dots\cdot\underbrace{e^{-i\hat{V}\epsilon}e^{-i\hat{K}\epsilon}}_{t=t_1=0}$$

Вставим после каждого члена $e^{-i\hat{K}\epsilon}$ (при $t=t_k$) единицу в виде разложения по координатному базису $\hat{\mathbb{I}} = \int d\boldsymbol{x}_k\,|\boldsymbol{x}_k\rangle\,\langle\boldsymbol{x}_k|$, а после членов $e^{-i\hat{V}\epsilon}$ — по импульсному $\hat{\mathbb{I}} = \int (d\boldsymbol{p}_k)\,|\boldsymbol{p}_k\rangle\,\langle\boldsymbol{p}_k|$

$$G^R(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t>0) \underset{\epsilon\to 0}{=} \int\prod_{k=1}^{N-1} d\boldsymbol{x}_k \int\prod_{k=1}^{N}(d\boldsymbol{p}_k)\underbrace{\langle\boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{y}|\,e^{-i\hat{V}\epsilon}\,|\boldsymbol{p}_N\rangle\,\langle\boldsymbol{p}_N|\,e^{-i\hat{K}\epsilon}\,|\boldsymbol{x}_{N-1}\rangle}_{t=t_N}\cdot\dots\cdot\underbrace{\langle\boldsymbol{x}_1|\,e^{-i\hat{V}\epsilon}\,|\boldsymbol{p}_1\rangle\,\langle\boldsymbol{p}_1|\,e^{-i\hat{K}\epsilon}\,|\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}\rangle}_{t=t_1} \tag{2}$$

Поскольку операторы $e^{-i\hat{V}\epsilon}$ — собственные для координаты, а $e^{-i\hat{K}\epsilon}$ — для импульса, то блоки вычисляются согласно:

$$\langle\boldsymbol{x}_k|\,e^{-i\hat{V}\epsilon}\,|\boldsymbol{p}_k\rangle\,\langle\boldsymbol{p}_k|\,e^{-i\hat{K}\epsilon}\,|\boldsymbol{x}_{k-1}\rangle = e^{-iV(\boldsymbol{x}_k)\epsilon}e^{i\boldsymbol{p}_k\boldsymbol{x}_k}e^{-iK(\boldsymbol{p}_k)\epsilon}e^{-i\boldsymbol{p}_k\boldsymbol{x}_{k-1}} \tag{3}$$

Собирая аккуратно члены, мы приходим к выражению:

$$\boxed{G^R(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t>0) \underset{\epsilon\to 0}{=} \int\prod_{k=1}^{N-1} d\boldsymbol{x}_k \int\prod_{k=1}^{N}(d\boldsymbol{p}_k)\exp\left(i\epsilon\sum_{k=1}^{N}\left(\boldsymbol{p}_k\frac{\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_{k-1}}{\epsilon} - H(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{p}_k)\right)\right)} \tag{4}$$

Функциональный интеграл

В пределе $N\to\infty$ и $\epsilon\to 0$, набор величин $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=0}^{N}$ и $\{\boldsymbol{p}_k\}_{k=1}^{N}$ можно представлять в виде функций уже непрерывного параметра — времени t, так что $\boldsymbol{x}(t_k=\epsilon k) = \boldsymbol{x}_k$ (и аналогично с импульсом). Поскольку $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{y}$ — фиксированы, и по ним не происходит интегрирование, то для соответствующих функций это значит $\boldsymbol{x}(t=0) = \boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}(t=T) = \boldsymbol{y}$. Для импульсов никакого такого требования нет.

Забудем на время, что построенные таким образом функции $\boldsymbol{x}(t)$ и $\boldsymbol{p}(t)$, вообще говоря, чаще всего будут оказываться недифференцируемы. В таком случае в экспоненте стоит конечная аппроксимация интеграла, представляющего собой классическое действие $S[x(t),p(t)]$, записанное в гамильтоновом формализме:

$$S[x(t),p(t)] = \int_0^T dt(p(t)\dot{x}(t) - H(x(t),p(t)))$$

Интегрирование по набору промежуточных координат и импульсов записывается через формальный символ “интегрирования по всем функциям”; понимать его пока нужно исключительно в смысле временной и пространственной дискретизации:

$$\int\mathcal{D}[\boldsymbol{x}(t)] \equiv \int\prod_{k=1}^{N-1} d\boldsymbol{x}_k, \quad \int\mathcal{D}[\boldsymbol{p}(t)] \equiv \int\prod_{k=1}^{N}(d\boldsymbol{p}_k) \tag{5}$$

Наконец, поскольку в нашем построении $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{y}$, то интегрирование происходит с так называемыми “закреплёнными концами” (то есть с условием $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}$). Тем самым, с учётом определения “меры функционального интеграла” (5), мы получаем представление запаздывающего пропагатора через функциональный интеграл:

---

[1] Случай общего положения — неразделяемый гамильтониан — разбирается в ПШ, глава 9.1 «Интеграл по путям в квантовой механике», стр. 277. В этом случае всё рассказанное тоже будет верно, просто гамильтониан нужно брать *упорядоченным по Вейлю*

[2] Согласно *формуле Бэйкера-Кэмпбела-Хаусдорфа (Baker-Campbell-Hausdorff formula)*, $e^Xe^Y = e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\cdots}$; тем самым поправки к этому выражению пропорциональны $[\hat{V}\epsilon,\hat{K}\epsilon] \propto \epsilon^2$, то есть вымирают в пределе $\epsilon\to 0$

$$\boxed{G^R(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, T > 0) = \int\limits_{\substack{\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}(T)=\boldsymbol{y}}} \mathcal{D}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{p}(t)] e^{iS[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{p}(t)]}} \tag{6}$$

Взятие интеграла по импульсам Обратим внимание, для обычной нерелятивистской частицы кинетическая энергия имеет вид $K(p) = \frac{p^2}{2m}$. Это позволяет нам взять интегралы по p_k в выражении (4), поскольку они все гауссовы:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (d\boldsymbol{p}_k) \exp\left(i\epsilon\left(\boldsymbol{p}_k \frac{\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_{k-1}}{\epsilon} - \frac{\boldsymbol{p}_k^2}{2m}\right)\right) = \left(\frac{m}{2\pi i\epsilon}\right)^{d/2} \exp\left(i\epsilon \frac{m}{2}\left(\frac{\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_{k-1}}{\epsilon}\right)^2\right) \tag{7}$$

$$\boxed{G^R(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t > 0) \underset{\epsilon\to 0}{=} \left(\frac{m}{2\pi i\epsilon}\right)^{Nd/2} \int \prod_{k=1}^{N-1} d\boldsymbol{x}_k \exp\left(i\epsilon \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{m}{2}\left(\frac{\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_{k-1}}{\epsilon}\right)^2 - V(\boldsymbol{x}_k)\right)\right)} \tag{8}$$

Если в этом случае модифицировать “меру” согласно $\mathcal{D}[\boldsymbol{x}(t)] \equiv \left(\frac{m}{2\pi i\epsilon}\right)^{N/2} \prod_{k=1}^{N-1} \int d\boldsymbol{x}_k$, и заметить, что в экспоненте стоит аппроксимация классического действия в лагранжевом формализме — $S[\boldsymbol{x}(t)] = \int dt \left(\frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^2 - V(\boldsymbol{x})\right)$, то мы придём к альтернативному представлению пропагатора через другой функциональный интеграл:

$$\boxed{G^R(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, T > 0) = \int\limits_{\substack{\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}(T)=\boldsymbol{y}}} \mathcal{D}[\boldsymbol{x}(t)] e^{iS[\boldsymbol{x}(t)]}} \tag{9}$$

Такое же выражение можно было бы получить на функциональном языке, «взяв» гауссов интеграл по импульсам согласно:

$$\int \mathcal{D}[\boldsymbol{p}(t)] \exp\left(-i \int dt \frac{(\boldsymbol{p}(t) - m\dot{\boldsymbol{x}}(t))^2}{2m}\right) = 1 \tag{10}$$

(в действительности это не единица, а некоторая бесконечная константа — которую мы «спрятали» в переопределение меры $\mathcal{D}[x(t)]$). Обратим внимание на следующие вещи. Во-первых, исходное представление (через интеграл по импульсам и координатам) в каком-то смысле более фундаментально; альтернативное представление работает только в случае квадратичной зависимости кинетической энергии от импульса. Во-вторых, в исходном представлении “мера” определялась приятней, чем в альтернативном; в ней не было неприятных зависимостей от масс и дискретизации ϵ.

У выражения для амплитуды перехода (пропагатора) через функциональны интеграл имеется прозрачный физический смысл. Квантовая частица из точки $\boldsymbol{x}$ в точку $\boldsymbol{y}$ может попасть каким угодно путём – по произвольной траектории, соединяющий эти две точки. При этом каждый путь имеет “вес” e^{iS}. Результирующая амплитуда складывается за счёт интерференции по всем траекториям.

Вообще говоря, каждый раз, когда пишется функциональный интеграл, нужно подразумевать, как именно следует “расшифровывать” меру $\mathcal{D}[x(t)]$; как мы видим, бывают разные варианты. Чаще, однако, это опускают. Два определения меры, которые мы тут получили, отличаются всего лишь на константу (хоть и бесконечную, и зависящую явно от дискретизации) — однако, что существенно, они совершенно не зависят от самой траектории $\boldsymbol{x}_k$ (или, альтернативно, $\boldsymbol{x}(t)$). В практически всех приложениях мы будем иметь дело с выражениями, в которых имеется отношение двух разных функциональных интегралов, в которых эта константа благополучно сокращается и, вообще говоря, может быть выбрана произвольной. В таких (и только таких!) случаях можно себе позволить опускать “расшифровку” меры функционального интегрирования.

Свойства функционального интеграла

- Имея «кратный функциональный интеграл», можно переходить к «повторному»:

$$\int \mathcal{D}[\boldsymbol{x}(t)]\mathcal{D}[\boldsymbol{p}(t)] \cdots = \int \mathcal{D}[\boldsymbol{x}(t)] \ldots \int \mathcal{D}[\boldsymbol{p}(t)] \ldots \tag{11}$$

- В функциональном интеграле можно сдвигать интеграл на константу[3]:

$$\int \mathcal{D}[\boldsymbol{x}(t)] \cdot I[\boldsymbol{x}(t)] = \int \mathcal{D}[\boldsymbol{x}(t)] \cdot I[\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{f}(t)] \tag{12}$$

  для произвольной функции $\boldsymbol{f}(t)$. Якобиан такого преобразования равен единице.

[3]Менее тривиальные замены координат могут потребовать вычисления якобиана соответствующего перехода. Конкретный вид якобиана можно построить, выяснив, как будет выглядеть его дискретный аналог

• Наконец, функциональный интеграл можно «сшивать»:

$$\int d\boldsymbol{y} \int\limits_{\substack{\boldsymbol{x}_1(t_a)=\boldsymbol{x}_a \\ \boldsymbol{x}_1(t)=\boldsymbol{y}}} \mathcal{D}[\boldsymbol{x}_1(t)] \int\limits_{\substack{\boldsymbol{x}_2(t)=\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{x}_2(t_b)=\boldsymbol{x}_b}} \mathcal{D}[\boldsymbol{x}_2(t)] \equiv \int\limits_{\substack{\boldsymbol{x}(t_a)=\boldsymbol{x}_a \\ \boldsymbol{x}(t_b)=\boldsymbol{x}_b}} \mathcal{D}[\boldsymbol{x}(t)] \tag{13}$$

Это же явно следует из определения пропагатора: $\int d\boldsymbol{y} \langle \boldsymbol{x}_b | \hat{U}(t_b,t) | \boldsymbol{y} \rangle \langle \boldsymbol{y} | \hat{U}(t,t_a) | \boldsymbol{x}_a \rangle \equiv \langle \boldsymbol{x}_b | \hat{U}(t_b,t_a) | \boldsymbol{x}_a \rangle$. Остальные свойства тривиально следуют из нашего определения функционального интеграла через дискретизацию.

Пример: квантовый гармонический осциллятор

Давайте вычислим функциональный интеграл для пропагатора квантового гармонического осциллятора: $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}$. Изложенный тут рецепт тривиально обобщается на произвольные функциональные интегралы. Во-первых: мы не хотим иметь дело с мерой функционального интеграла, которая как правило содержит бесконечную константу, зависящую от дискретизации. Стандартный трюк для того, чтобы от неё избавиться — это рассмотреть отношение функциональных интегралов; например, пропагатора осциллятора и пропагатора свободной частицы, который нам известен:

$$\frac{G^R_\omega(x,y,T)}{G^R_0(x-y,T)} = \frac{\int_{x(0)=y}^{x(T)=x} \mathcal{D}[x(t)] \exp\left(i\int_0^T \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2x^2}{2}\right] dt\right)}{\int_{x(0)=y}^{x(T)=x} \mathcal{D}[x(t)] \exp\left(i\int_0^T \frac{m\dot{x}^2}{2} dt\right)} \tag{14}$$

В таком случае, покуда мера в числителе и знаменателе выбрана одинаковой, эта константа нас волновать не должна. Во-вторых: мы имеем дело с гауссовым функциональным интегралом — действие квадратично по $x(t)$, и его можно записать в виде

$$S[x(t)] = \frac{m}{2} \int x(t) \cdot \hat{L} x(t) dt \tag{15}$$

с линейным оператором $\hat{L} = -\partial_t^2 - \omega^2$. Этот линейный оператор определяет классические уравнения движения: $\hat{L}x_{cl}(t) = 0$. Давайте найдём классическую траекторию, которая удовлетворяет нашим граничным условиям $x_{cl}(0) = x$ и $x_{cl}(T) = y$, и сделаем подстановку в функциональный интеграл $x(t) = x_{cl}(t) + z(t)$. В таком случае мы будем иметь дело с интегралом по всем функциям $z(t)$, но которые уже будут удовлетворять нулевым граничным условиям. Сдвижка же приведёт к добавке к действию (это верно только потому, что действие квадратично, а траектория x_{cl} удовлетворяет классическим уравнениям движения):

$$S[x_{cl}(t) + z(t)] = S_{cl} + S[z(t)] \tag{16}$$

Для действия записанного в виде $S[x(t)] = \frac{m}{2}\int x(t)\hat{L}x(t)dt$ может показаться, что $S[x_{cl}(t)] = 0$ в силу $\hat{L}x_{cl}(t) = 0$; что, конечно, не так — для того, чтобы привести действие к необходимому виду, мы проинтегрировали по частям, и для классической траектории внеинтегральный член отличен от нуля. Для траектории $z(t)$ с нулевыми граничными условиями внеинтегральный член очевидным образом равен нулю. В частности, для свободной частицы классическая траектория соответствует частице, летящей равномерно и прямолинейно $x(t) = y + \frac{x-y}{T}t$, и действие на такой траектории равно $S_{cl} = \frac{m(x-y)^2}{2T}$. Благодаря этому свойству мы можем искать только пропагатор при $x = y = 0$, что в данной задаче проще:

$$G^R(x,y,T) = G^R(0,0,T)e^{iS_{cl}(x,y,T)} \tag{17}$$

(опять-же, для классической частицы это свойство очевидным образом выполняется). Наконец, последний шаг — произвольную функцию $z(t)$ можно разложить по базису собственных функций оператора $\hat{L}$, который для осциллятора выглядит следующим образом:

$$z(t) = \sum_n c_n z_n(t) \tag{18}$$

$$\hat{L}z_n(t) = \lambda_n z_n(t), \quad z_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\frac{\pi n t}{T}, \quad \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{T^2} - \omega^2 \tag{19}$$

Меру функционального интеграла можно в таком случае выбрать в следующем виде: $\int \mathcal{D}[z(t)] \equiv \mathcal{N}\prod_{n=1}^\infty \int_{-\infty}^\infty dc_n$ (с бесконечной константой $\mathcal{N}$, одинаковой для числителя и знаменателя). Очевидно, что при этом мы действительно учтём все функции по одному разу; менее очевидно, но тоже верно, что эта замена — просто замена базиса, она даётся ортогональной матрицей (в дискретном случае), и якобиан такого перехода будет единичным. Наконец, в силу ортонормированности набора $z_n(t)$ мы немедленно замечаем, что действие факторизуется:

$$S[\sum_n c_n z_n(t)] = \sum_{n=1}^\infty \frac{m}{2}\lambda_n c_n^2 \tag{20}$$

Поэтому мы можем записать (записывая явно бесконечную константу, связанную с мер

$$G^R_\omega(0,0,T) = \mathcal{N}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{n=1}^{\infty} dc_n \exp\left(i\frac{m}{2}\lambda_n c_n^2\right) = \mathcal{N}\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2\pi i}{m\left(\frac{\pi^2 n^2}{T^2}-\omega^2\right)}} \tag{21}$$

Наконец, заметив, что знаменатель равен числителю с $\omega = 0$, мы получаем, что все «лишние» константы сокращаются и остаётся следующее соотношение:

$$\frac{G^R_\omega(0,0,T)}{G^R_0(0,T)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\omega^2 T^2}{n^2\pi^2}\right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{\omega T}{\sin\omega T}} \tag{22}$$

Вычисление такого бесконечного произведения — отдельная задача; при этом оно хорошо определено, поскольку при $n\to\infty$ члены стремятся к единице. Можно, например, заметить, что функция в левой и правой части обращается в ноль при $\omega T = \pi n, \quad n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, и что при $\omega T = 0$ она равна единице. Это не является доказательством этого тождества, но является мнемоническим правилом, позволяющим его запомнить. Таким образом, мы получаем:

$$\boxed{G^R_\omega(0,0,T) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\sin\omega T}}} \tag{23}$$

(зависимость от координат восстанавливается добавлением классического действия).

Спектр

Из знания запаздывающего пропагатора можно извлечь, например, спектр гамильтониана. Для этого его можно явно вычислить в базисе собственных функций гамильтониана:

$$G^R(x,y,T) = \langle x|\, e^{-i\hat{H}T}\,|y\rangle = \sum_n \langle x|n\rangle\, e^{-iE_nT}\,\langle n|y\rangle = \sum_n \psi_n(x)\psi_n^*(y)e^{-iE_nT} \tag{24}$$

Полученный пропагатор тоже можно представить в таком виде. Действительно:

$$G^R(0,0,T) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi(e^{i\omega T}-e^{-i\omega T})}} = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi}}e^{-i\omega T/2}(1-e^{-2i\omega T})^{-1/2} = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n C^n_{-1/2}e^{-i\omega T(2n+\frac{1}{2})} \tag{25}$$

и мы получили часть спектра — $E_{2n} = \omega(2n+\frac{1}{2})$. Можно задаться резонным вопросом — куда же делась половина спектра? Ответ прост: дело в том, что пропагатор $G^R(0,0,T)$ пропорционален волновым функциям в нуле $\psi_n(0)$; а для функций с нечётным n это значение равно нулю, поскольку они сами нечётны. Для того, чтобы получить весь спектр, было бы правильно рассмотреть следующую величину:

$$\boxed{\int dx G^R(x,x,T) = \sum_n e^{-iE_nT}} \tag{26}$$

Эквивалентность интеграла по траекториям и уравнения Шрёдингера

Наконец, обсудим вопрос о том, как из интеграла по траекториям можно было бы в обратную сторону вывести уравнение Шрёдингера. Для этого рассмотрим эволюцию на бесконечно малое время ϵ, и запишем:

$$\psi(x,t+\epsilon) = \langle x|\,\hat{U}(\epsilon)\,|\psi(t)\rangle = \int d\eta\,\langle x|\,\hat{U}(\epsilon)\,|x+\eta\rangle\,\psi(x+\eta,t) \tag{27}$$

Для пропагатора на бесконечно малое время мы можем воспользоваться видом через функциональный интеграл (тут мы восстановили $\hbar$):

$$\langle x|\,\hat{U}(\epsilon)\,|x+\eta\rangle = \int_{x(t)=x+\eta}^{x(t+\epsilon)=x}\mathcal{D}[x(t)]\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int dt\left[\frac{m\dot{x}^2}{2}-V(x(t))\right]\right) \approx \mathcal{N}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(\frac{m\eta^2}{2\epsilon}-\epsilon V(x)\right)\right) \tag{28}$$

В силу малости ϵ, член с потенциальной энергией можно разложить $e^{-i\epsilon V(x)/\hbar}\approx 1-i\epsilon V(x)/\hbar$. По η происходит интегрирование, и множитель $\exp\left(\frac{im\eta^2}{2\epsilon\hbar}\right)$ говорит, что типичные значения $\eta\propto\sqrt{\epsilon}$. Поэтому подынтегральную волновую функцию можно разложит в ряд по ϵ, оставив первые три члена:

$$\psi(x+\eta,t) \approx \psi(x,t) + \eta\partial_x\psi(x,t) + \frac{1}{2}\eta^2\partial_x^2\psi(x,t) \tag{29}$$

После такого разложения, можно явно проинтегрировать по η и получить:

$$\int d\eta \cdot e^{im\eta^2/2\epsilon\hbar}\psi(x+\eta,t) \approx \sqrt{\frac{2\pi i\hbar\epsilon}{m}}\left[1 + i\epsilon\frac{\hbar}{2m}\partial_x^2\right]\psi(x,t) \tag{30}$$

Поскольку при $\epsilon = 0$ очевидным образом должно иметь место тождество, мы заключаем, что $\mathcal{N} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}}$ (что, впрочем, известно и из дискретного представления для функционального интеграла (8)). Собирая ведущие по ϵ члены, мы получаем:

$$\psi(x,t+\epsilon) = \left(1 - \frac{i\epsilon}{\hbar}V(x) + i\epsilon\frac{\hbar}{2m}\partial_x^2\right)\psi(x,t), \tag{31}$$

Наконец, заменяя $\frac{\psi(x,t+\epsilon)-\psi(x,t)}{\epsilon} \simeq \partial_t\psi(x,t)$, мы немедленно воспроизводим уравнение Шрёдингера:

$$i\partial_t\psi(x,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi(x,t) \tag{32}$$

Данный пример был достаточно академичен, и ничего нового нам не дал. Однако, например, для диффузии (или, более общо — классической частицы, движущийся в вязкой среде под действием случайных Ланжевеновских сил) представление через функциональный интеграл строится достаточно просто и прямолинейно. Подобным преобразованием можно вывести, например, уравнение Фоккера-Планка для функции распределения $P(x,t)$.