

# Инстантоны и туннелирование

## Постановка задачи

На данном семинаре мы будем искать туннельное расщепление в двухъямном потенциале. Для удобства мы положим массу частицы  $m = 1$ , а потенциал зададим в виде  $U(x) = \lambda(x^2 - \eta^2)^2$ , и тем самым Гамильтониан задачи имеет следующий вид:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\partial_x^2 + \lambda(x^2 - \eta^2)^2 \quad (1)$$

Потенциал имеет пару минимумов в точках  $x = \pm\eta$ , вблизи которых он имеет осцилляторное разложение  $V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$ , с частотами  $\omega^2 = 8\lambda\eta^2$ . Высота барьера, разделяющего эти две ямы, равна  $U(0) = \lambda\eta^4$ ; поэтому квазиклассическому приближению соответствует  $\lambda\eta^6 \gg 1 \Leftrightarrow \omega\eta^2 \gg 1$ . Именно в таком приближении мы и будем решать эту задачу. На самом деле, её мы уже обсуждали в семинаре, посвящённом квазиклассическому приближению; в частности, мы вычисляли расщепление  $n$ -того осцилляторного уровня (на симметричные и антисимметричные комбинации). Квазиклассическое приближение, впрочем, работает только при  $n \gg 1$ ; а сейчас мы сфокусируемся на расщеплении основного состояния  $n = 0$ . Для вычисления, мы воспользуемся слегка модифицированным аппаратом функций Грина, и функциональным интегралом.

## Виковский поворот и Евклидово действие

Удобнее всего исследовать свойства основного состояния в мнимом времени  $t = -i\tau$ . Функцию Грина во мнимом времени мы будем обозначать следующим образом<sup>3</sup>:

$$G_E(x, y, \tau) \equiv G(x, y, -i\tau) = \langle x | e^{-\hat{H}\tau} | y \rangle = \sum_n \psi_n(x) \psi_n^*(y) e^{-E_n \tau} \quad (2)$$

Обратим внимание, что чем выше возбуждение, тем меньший вклад оно даёт в эту сумму. Поэтому, в принципе, если рассмотреть  $\tau = \beta \rightarrow +\infty$ , то главный вклад останется только от основного (и, в нашем случае — первого возбуждённого) состояния. Именно этот случай мы и будем исследовать.

Для Евклидовой функции Грина можно вывести представление через функциональный интеграл, полностью эквивалентно тому, что мы делали на предыдущем семинаре. Ответ, в действительности, будет таким же, как если бы мы попросту в действие сделали формальную подстановку  $t = -i\tau$ . При этом:

$$iS[x(t)] = i \int \left[ \frac{1}{2}(\partial_t x)^2 - U(x(t)) \right] dt = - \int \left[ \frac{1}{2}(\partial_\tau x)^2 + U(x(\tau)) \right] d\tau \equiv -S_E[x(\tau)] \quad (3)$$

$$G_E(x, y, \beta) = \int_{x(-\beta/2)=y}^{x(\beta/2)=x} \mathcal{D}x(\tau) \exp \left( - \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau \left[ \frac{1}{2}(\partial_\tau x)^2 + U(x(\tau)) \right] \right) \quad (4)$$

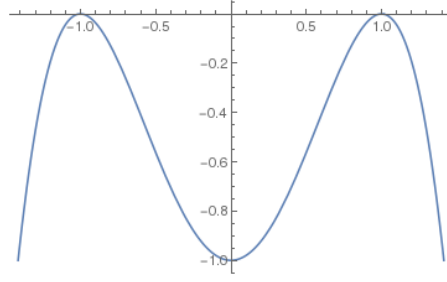
Последнее называют «Евклидовым действием», и, как мы видим, оно отличается от обычного только изменением знака у потенциала  $U(x)$  — тем самым, с классической точки зрения оно описывает движение в перевёрнутом потенциале. В дальнейшем нижний индекс « $E$ » мы будем опускать, помня, что мы отныне работаем в мнимом времени.

<sup>1</sup>Именно такие обозначения приняты в «Инстантонной азбуке»

<sup>2</sup>Такой поворот в комплексную плоскость времени называют Виковским, или «Евклидовым». Последнее чаще используется в контексте релятивистской квантовой теории поля — дело в том, что после такого поворота метрика Минковского  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ , задаваемая через интервал  $ds^2 = dt^2 - d\mathbf{r}^2$ , превращается в Евклидову метрику  $\delta_{\mu\nu}$  (с точностью до знака)  $ds^2 = -(d\tau^2 + d\mathbf{r}^2)$ .

<sup>3</sup>В действительности же, для мнимого времени  $\tau = \beta = T^{-1}$  это попросту соответствует координатной матрице плотности

Рис. 1: Перевёрнутый («евклидов») двухъямный потенциал  $-U(x)$ . Оси в единицах  $\eta$  ( $Ox$ ) и  $\lambda$  ( $Oy$ )



## Метод перевала

Поскольку  $U(x)$  представляет собой полином четвёртой степени, мы имеем дело с нелинейным действием и с негауссовым функциональным интегралом. Брать этот интеграл мы будем методом перевала, который соответствует нахождению *классических* траекторий, минимизирующих действие — и квадратичному разложению вблизи них. Две тривиальных классических траектории очевидны — они соответствуют покоящимся частицам в точках  $x(t) = \pm\eta$ . Действие на них равно нулю, а квадратичное разложение устроено так же, как и для квантового гармонического осциллятора; и они дадут соответствующий вклад в следующие функции Грина в совпадающих точках, связанной с посчитанной на предыдущем семинаре функцией Грина квантового гармонического осциллятора  $G_0(\beta)$  (с массой  $m = 1$ ):

$$G^{(0)}(\eta, \eta, \beta) = G^{(0)}(-\eta, -\eta, \beta) \simeq G_0(\beta) = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi \sinh(\beta\omega)}} \approx \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\beta\omega/2} \quad (5)$$

Из этого мы действительно видим, что в ведущем приближении имеется (двукратно вырожденный) осцилляторный уровень энергии  $E = \omega/2$ ; но это не то, что нас интересует — нас интересует туннельное расщепление! Туннелированию соответствует переход из левой ямы в правую, поэтому именно такую функцию Грина мы будем считать:  $G_E(\eta, -\eta, \beta)$ .

## Логика

Давайте вспомним, как мы берём многомерные интегралы методом перевала  $I = \int \exp(-f(\mathbf{x})) d^d \mathbf{x}$ . Рецепт прост: мы сперва мы ищем максимум, решая седловое уравнение (или систему уравнений)  $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} = 0$  — и находя решение, точку  $\mathbf{x}_0$ . В ведущем приближении, значение интеграла даётся значением функции в этой точке:  $I \approx \exp(-f(\mathbf{x}_0))$ . Затем мы рассматриваем квадратичное разложение вблизи седловой точки:  $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{z}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} z_i z_j$ ; и, наконец, берём гауссов интеграл:

$$I \approx e^{-f(\mathbf{x}_0)} \int d^d \mathbf{z} \exp\left(-\frac{1}{2} L_{ij} z_i z_j\right) = \frac{1}{\sqrt{\det \frac{\dot{L}}{2\pi}}} e^{-f(\mathbf{x}_0)} \quad (6)$$

Функциональный интеграл в этом смысле ничем не отличается — и мы применим этот рецепт и тут.

## Седло

Итак, нам нужно найти классическую траекторию  $x_{cl}(\tau)$ , удовлетворяющую экстремуму действия с граничными условиями  $x(-\beta/2) = -\eta$  и  $x(\beta/2) = \eta$ :

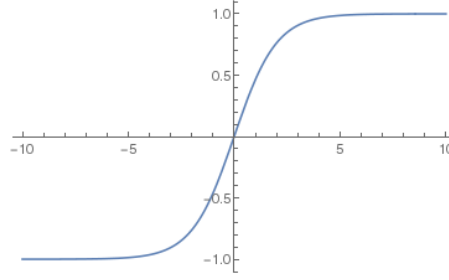
$$\frac{\delta S_E}{\delta x(\tau)} = 0 \Rightarrow \partial_\tau^2 x = U'(x(\tau)) \quad (7)$$

Данное уравнение можно решить в квадратурах, но проще всего решение устроено, если тут сразу взять предел  $\beta \rightarrow \infty$ . В таком случае, траектории соответствует перекатывающаяся за бесконечное время частица из левого «горба» перевёрнутого потенциала на правый. Чтобы найти эту траекторию, можно воспользоваться законом сохранения «энергии»  $E = \frac{1}{2}(\partial_\tau x)^2 - U(x(\tau)) = \text{const}$  (на нашей траектории  $E = 0$ ), благодаря чему понизить степень уравнения до первой:

$$\frac{1}{2}(\partial_\tau x)^2 = U(x(\tau)) \Rightarrow \frac{dx}{x^2 - \eta^2} = \sqrt{2\lambda} d\tau \Rightarrow \boxed{x_{cl}(\tau) = \eta \tanh \frac{\omega\tau}{2}} \quad (8)$$

Такую траекторию — нетривиальный экстремум нелинейного действия в функциональном интеграле — называют *инстантоном*.

Рис. 2: Инстантонная конфигурация  $x_{cl}(\tau)$ . Оси в единицах  $\omega$  ( $Ox$ ) и  $\eta$  ( $Oy$ )



Тут мы сталкиваемся с важной особенностью задачи. Вместо одной седловой траектории, мы, в действительности, имеем дело с целым *седловым многообразием*  $x_{cl}(\tau - \tau_c)$ , параметризуемым вещественным числом  $\tau_c$  — положением инстантона. Наличие этой свободы, конечно, связано с трансляционной инвариантностью по времени — мы ведь взяли предел  $\beta \rightarrow \infty$ ! Инстантон имеет характерную ширину  $\sim \omega^{-1}$ , которая мала (в частности,  $\omega^{-1} \ll \beta$ ), и поэтому краевые эффекты, связанные с удержанием конечного  $\beta$ , будут экспоненциально малы на фоне основного результата, и в ведущем порядке они действительно не важны. Величина же  $\tau_c$  с этой же точностью может пробегать все значения  $\tau_c \in (-\beta/2, \beta/2)$ . К этой свободе выбора центра инстантона мы ещё вернёмся, а пока давайте рассмотрим одно седло на этом многообразии, скажем,  $\tau_c = 0$ .

Итак, в главном порядке значение интеграла определяется действием на этом инстантоне. Давайте его вычислим (для этого удобно воспользоваться «законом сохранения энергии» и выразить член с потенциальной энергией через кинетическую):

$$S_0 = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau (\partial_{\tau} x_{cl})^2 = \frac{2}{3} \omega \eta^2 \gg 1 \quad (9)$$

Несложно убедиться, что это действие тождественно совпадает с «квазиклассическим действием»  $\int_{-\eta}^{\eta} p(x) dx$ , которое определяло бы расщепление в квазиклассическом приближении.

## Квадратичное разложение

Следуя логике метода перевала, нам нужно провести квадратичное разложение вблизи инстантона:

$$S_E[x_{cl}(\tau) + z(\tau)] \approx S_0 + \frac{1}{2} \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau [(\partial_{\tau} z)^2 + U''(x_{cl}(\tau)) z^2(\tau)] \equiv S_0 + S_2[z(\tau)] \quad (10)$$

В квадратичном разложении действия стоит линейный оператор  $\hat{L} = -\partial_{\tau}^2 + U''(x_{cl}(\tau))$ , спектр которого нам предстоит исследовать при взятии гауссового интеграла по квадратичным флуктуациям. Ответ тем самым с точки зрения метода перевала устроен следующим образом:

$$G(\eta, -\eta, \beta) \approx e^{-S_0} \int_{z(-\beta/2)=0}^{z(\beta/2)=0} \mathcal{D}[z(\tau)] e^{-S_2[z(\tau)]} \quad (11)$$

Явный вид оператора следующий:

$$U''(x_{cl}(\tau)) = \frac{\omega^2}{2} (3 \tanh^2 \frac{\omega \tau}{2} - 1) = \omega^2 \left( 1 - \frac{3/2}{\cosh^2 \frac{\omega \tau}{2}} \right) \quad (12)$$

## Спектр оператора

Итак, для взятия гауссового интеграла по  $z(\tau)$  нам необходимо исследовать свойства (спектр) оператора  $-\partial_{\tau}^2 + U''(x_{cl}(\tau))$ . Задача на его собственные значения  $\epsilon_n$  и собственные функции  $\psi_n(\tau)$  выглядит следующим образом:

$$\left( -\partial_{\tau}^2 - \frac{3\omega^2/2}{\cosh^2 \frac{\omega \tau}{2}} \right) \psi_n(\tau) = (\epsilon_n - \omega^2) \psi_n(\tau) \quad (13)$$

Данное уравнение выглядит в точности как уравнение Шрёдингера в потенциале  $\frac{1}{\cosh^2 x}$ , решение которого нам известно — оно выражается через гипергеометрическую функцию  ${}_2F_1$ , и мы его обсуждали на четвёртом семинаре прошлого семестра. Воспользуемся ответами из того семинара, в которые нужно подставить следующие значения параметров:

$$m = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{2}{\omega}, \quad U_0 = \frac{3\omega^2}{2} \quad (14)$$

Важным для исследования потенциала оказываются следующие два безразмерных параметра:

$$u = \frac{U_0}{1/2ma^2} = 6, \quad s = \frac{1}{2}(\sqrt{1+4u} - 1) = 2 \quad (15)$$

**Дискретный спектр** Как мы помним, число  $s$  характеризует количество связанных состояний. Для энергий  $E_n \equiv \epsilon_n - \omega^2$  работает следующая формула:

$$E_n = -\frac{(s-n)^2}{2ma^2} = -\frac{\omega^2}{4}(s-n)^2 \Rightarrow \epsilon_n = \omega^2 + E_n = \begin{cases} \epsilon_0 = 0 \\ \epsilon_1 = \frac{3}{4}\omega^2 \end{cases} \quad (16)$$

(число  $n = 0, 1, \dots$  и  $n < s$ ). Кроме того, целые числа  $s$  соответствуют случаю *возникновению* в яме связанного состояния (что означает, что есть состояния со строго нулевой энергией  $E = 0$ , которое, тем не менее, уже относится к непрерывному спектру).

**Нулевая мода** Обратим внимание — в задаче имеется нулевая мода  $\epsilon_0 = 0$ , соответствующая основному состоянию на языке квантовой механики. Его «волновая функция» тоже выписывалась на семинаре, и она выглядит как (константа  $C_0$  обеспечит нормировку на единицу;  $s = 2$ ):

$$\psi_0(\tau) = \frac{C_0}{\cosh^s \frac{\omega\tau}{2}} \quad (17)$$

В действительности же, наличие нулевой моды, как мы сказали выше, связано с свободой выбора центра инстантона. Это утверждение можно формализовать:  $S[x_{cl}(\tau)] \equiv S[x_{cl}(\tau + \delta\tau)]$ , поэтому инфинитезимальная  $\delta\tau$  соответствует «приращению»  $z(\tau) = \delta\tau \frac{\partial x_{cl}(\tau)}{\partial \tau}$ . С другой стороны,

$$S[x_{cl}(\tau) + z(\tau)] \approx S[x_{cl}(\tau)] + S_2[z(\tau)] = S[x_{cl}(\tau)] + \delta\tau^2 \cdot S_2 \left[ \frac{\partial x_{cl}}{\partial \tau} \right] \quad (18)$$

и тем самым мы понимаем, что  $\frac{\partial x_{cl}}{\partial \tau}$  (с точностью до нормировки) даёт нулевую моду действия  $S_2$ . Несложно убедиться, что она (с точностью до константы) совпадает с выписанной тут  $\psi_0(\tau)$ . В дальнейшем нам приходится нормированное выражение для  $\psi_0(\tau)$ ; это можно сделать в общем виде, используя выражения для действия на инстантоне (9). Тем самым, мы получаем:

$$\psi_0(\tau) = \frac{1}{\sqrt{S_0}} \frac{\partial x_{cl}}{\partial \tau} \quad (19)$$

**Непрерывный спектр** В том-же 4 семинаре исследовался также и непрерывный спектр оператора. В частности, имелось выражение для волновых функций задачи рассеяния (волна падает слева направо — для полного набора к ним, конечно же, нужно добавить также решения, соответствующие падению волны справа налево). Особенностью данного потенциала является то, что при целом  $s$  рассеяния оказывается *безотражательным*, и волновая функция задачи рассеяния содержит только прошедший «кусоч».

Непрерывный спектр параметризуется волновым вектором  $k$ , так что энергия  $E_k = \frac{k^2}{2m} = k^2 \Rightarrow \epsilon_k = \omega^2 + k^2$ ; а сами волновые функции имеют следующий вид:

$$\psi_k(x) \approx \begin{cases} \frac{\Gamma(1-ika)\Gamma(-ika)}{\Gamma(-ika-s)\Gamma(-ika+s+1)} e^{ikx} \equiv e^{ikx+i\delta(k)} & x \rightarrow -\infty \\ e^{ikx}, & x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (20)$$

(безотражательность рассеяния означает, что амплитуда прохождения сводится к чистой фазе:  $t = e^{-i\delta(k)}$ ). Аналитическое выражение для фазы тоже можно выписать (подставляя  $a = \frac{2}{\omega}$  и  $s = 2$ )<sup>4</sup>:

$$e^{-i\delta(k)} = \frac{\Gamma(-ika-2)\Gamma(-ika+3)}{\Gamma(1-ika)\Gamma(-ika)} = \frac{(2-ika)(1-ika)}{(2+ika)(1+ika)} = \frac{1-\frac{ik}{\omega}}{1+\frac{ik}{\omega}} \cdot \frac{1-\frac{2ik}{\omega}}{1+\frac{2ik}{\omega}} = \exp \left( -2i \left[ \arctan \frac{k}{\omega} + \arctan \frac{2k}{\omega} \right] \right) \quad (21)$$

$$\delta(k) = 2 \left[ \arctan \frac{k}{\omega} + \arctan \frac{2k}{\omega} \right] = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ 2\pi, & k \rightarrow \infty \end{cases} \quad (22)$$

Помимо таких состояний, имеются также и комплексно-сопряжённые решения  $\psi^*(x)$ , которые описывают волны, падающие справа налево; и вместе они образуют полный набор.

<sup>4</sup>Существует прекрасное топологическое утверждение, которое носит название *теоремы Левинсона*. Данная теорема связывает разность фаз рассеяния с количеством связанных уровней в трёхмерной сферической симметричной яме:  $\delta_l(k \rightarrow \infty) - \delta_l(0) = -\pi N$  (имеются модификации: в правой части имеется фактор  $1/2$  в случае, когда в яме только возникает связанное состояние на нулевой энергии — наш случай — а также для  $s$ -канала рассеяния). Она также достаточно просто и обобщается на одномерье.

**Дискретизация непрерывного спектра** В действительности же тут пора вспомнить о том, что на языке функционального интеграла мы рассматриваем траектории на конечном, хоть и большом, интервале  $\beta$  с нулевыми граничными условиями. Поэтому непрерывный спектр в действительности является дискретным — нам необходимо лишь составить линейную комбинацию  $\psi_k$  и  $\psi_k^*$ , которая занулялась бы на обеих стенках. Те  $k$ , при которых это возможно, и будут давать уровни энергии  $\epsilon_n = \omega^2 + k_n^2$ . Итак, пусть волновая функция имеет вид  $\psi_n(x) = A\psi_k(x) + B\psi_k^*(x)$ . Тогда имеется пара условий:

$$\begin{cases} A\psi_k(-\beta/2) + B\psi_k^*(-\beta/2) = 0 \\ A\psi_k(\beta/2) + B\psi_k^*(\beta/2) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

Такая система уравнений на  $A$  и  $B$  совместна и имеет ненулевое решение только если её определитель равен нулю:

$$\det \begin{vmatrix} \psi_k(-\beta/2) & \psi_k^*(-\beta/2) \\ \psi_k(\beta/2) & \psi_k^*(\beta/2) \end{vmatrix} = 0 \quad (24)$$

Используя асимптотики волновой функции на  $\pm\infty$  (известные из задачи рассеяния) мы тем самым получаем:

$$\det \begin{vmatrix} e^{-ik\beta/2+i\delta(k)} & e^{ik\beta/2-i\delta(k)} \\ e^{ik\beta/2} & e^{-ik\beta/2} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \sin(k\beta + \delta(k)) = 0 \quad (25)$$

Тем самым, имеется набор  $k_n$ , которые являются решением следующего трансцендентного уравнения:

$$k_n\beta - \delta(k_n) = \pi n \quad (26)$$

Обратим внимание, что случаю  $n = 0$  соответствует тривиальное решение этого, вообще говоря, трансцендентного уравнения:  $k = 0$ . Такая волновая функция — тождественный ноль, и нас не интересует. Поэтому нумерация  $n$  начинается с 1.

Давайте исследуем, как устроены решения этого уравнения. Вообще говоря, поскольку  $\beta \gg 1$  — очень большое число, то при  $n \ll \beta$  решения этого уравнения очень близки к  $k_n \approx p_n \equiv \frac{\pi n}{\beta}$ ; поправки можно найти по теории возмущений. С другой стороны, при  $n \gtrsim \beta$ , фазы рассеяния уже выходят на константу  $\delta(k_n) \approx \delta(k_n \rightarrow \infty) = 2\pi$ . Поэтому решение уравнения устроено следующим образом:

$$\boxed{k_n \approx p_n + \delta(p_n)/\beta, \quad p_n = \pi n/\beta} \quad (27)$$

## Нормировка функционального интеграла

Конечно, как мы уже обсуждали ранее, мера функционального интеграла  $\mathcal{D}$  содержит бесконечную константу  $\mathcal{N}$ , связанную с дискретизацией — и поэтому буквально выписанным выражением воспользоваться не удастся. Для того, чтобы придать этому выражению смысл, необходимо рассмотреть отношение двух функциональных интегралов, в котором эта бесконечная нормировка сократится. В качестве такого выражения удобно использовать уже сосчитанную ранее функцию Грина квантового гармонического осциллятора; удобно выбрать его с такой же частотой  $\omega$ , чтобы квадратичные операторы, стоящие в действии были похожи:

$$G_0(\beta) = \int_{z(-\beta/2)=0}^{z(\beta/2)=0} \mathcal{D}[z(\tau)] \exp \left( -\frac{1}{2} \int_{-\beta/2}^{\beta/2} [(\partial_\tau z)^2 + \omega^2 z^2] \right) = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi \sinh \omega \beta}} \quad (28)$$

И тем самым мы, в действительности, будем работать со следующим выражением:

$$\frac{G(\eta, -\eta, \beta)}{G_0(\beta)} = e^{-S_0} \frac{\int_{z(-\beta/2)=0}^{z(\beta/2)=0} \mathcal{D}[z(\tau)] \exp \left( -\frac{1}{2} \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau [(\partial_\tau z)^2 + U''(x_{cl}(\tau))z^2(\tau)] \right)}{\int_{z(-\beta/2)=0}^{z(\beta/2)=0} \mathcal{D}[z(\tau)] \exp \left( -\frac{1}{2} \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau [(\partial_\tau z)^2 + \omega^2 z^2] \right)} \quad (29)$$

## Спектр оператора (знаменатель)

Собственно, с функциональным интегралом, что стоит в знаменателе, мы уже работали — поэтому кратко озвучим результаты. В принципе, оператор  $(-\partial_\tau^2 + \omega^2)$ , который там стоит, тоже похож на уравнение Шрёдингера в константном потенциале  $U(\tau) = \omega^2 = \text{const}$ , и тоже обладает лишь непрерывным спектром. Однако нулевые граничные условия, как и в прошлый раз, спектр дискретизуют, волновые функции  $\psi_k^{(0)}(\tau)$  представляют собой стоячие волны, а спектр получается следующий:

$$\boxed{\epsilon_p^{(0)} = \omega^2 + p^2, \quad p = p_n = \pi n/\beta} \quad (30)$$

## Вычисление гауссового интеграла

Итак, мы вплотную приблизились к тому, чтобы, наконец, посчитать гауссов функциональный интеграл. Мы делаем разложение в числителе вида  $z(\tau) = \sum_n c_n \psi_n(\tau)$  (учитывая дискретный спектр!) и в знаменателе  $z(\tau) = \sum_n c_n \psi_n^{(0)}(\tau)$ . Учитывая гауссовость обоих интегралов, мы получаем:

$$\frac{G(\eta, -\eta, \beta)}{G_0(\beta)} = e^{-S_0} \prod_n \left( \frac{\int dc_n \exp(-\frac{1}{2} \epsilon_n c_n^2)}{\int dc_n \exp(-\frac{1}{2} \epsilon_n^{(0)} c_n^2)} \right) \quad (31)$$

(обратите внимание, что поскольку мы имеем дело, вообще говоря, с бесконечными произведениями *размерных* констант — после вычисления функционального интеграла — которые сами по себе плохо определены, то чтобы этот интеграл имел смысл, необходимо делить буквально почленно. Ровно этим мы и занимались, когда считали осциллятор). Если бы не было нулевой моды, то это считалось бы следующим образом:

$$\frac{G(\eta, -\eta, \beta)}{G_0(\beta)} = e^{-S_0} \left( \prod_n \frac{\epsilon_n}{\epsilon_n^{(0)}} \right)^{-1/2} \equiv e^{-S_0} \left( \frac{\det(-\partial_\tau^2 + U''(x_{cl}(\tau)))}{\det(-\partial_\tau^2 + \omega^2)} \right)^{-1/2} \quad (32)$$

**Нулевая мода** Итак, интеграл по  $dc_0$ , соответствующий нулевой моде  $\psi_n(\tau)$ , происходит в бесконечных пределах, выглядит как  $\int dc_0$  и в гауссовом приближении расходится — в таком случае, как правило, интеграл нужно брать *точно*. Наличие нулевых мод, как правило, связаны с какой-то симметрией — в данном случае, трансляционной; и в таком случае интегрирование обычно сводится к *объему* соответствующей группы симметрии.

В нашем случае, нулевая мода напрямую связана с произвольностью выбора константы  $\tau_c$  в инстантоне, который имеет вид  $x_c(\tau - \tau_c)$ . Заметим, что смещение вдоль нулевой моды  $dc_0$  в точности соответствует смещению центра инстантона:

$$d(x_{cl}(\tau - \tau_c)) \equiv \psi_0(\tau) dc_0, \quad d(x_{cl}(\tau - \tau_c)) \equiv \frac{\partial x_{cl}}{\partial \tau} d\tau_c \quad (33)$$

Приравнивая эти два выражения, и замечая, что  $\psi_0(\tau) = \frac{1}{\sqrt{S_0}} \frac{\partial x_{cl}}{\partial \tau}$ , мы получаем следующий вид интеграла по нулевой моде в числителе:  $\int dc_0 \equiv \sqrt{S_0} \int d\tau_c = \beta \sqrt{S_0}$ . В соответствующем выражении в знаменателе стоит следующий интеграл (там нумерация  $n$  начинается с 1, что, впрочем, не очень важно — ведь мы имеем дело с непрерывным спектром, и все собственные числа с маленькими номерами малы):

$$\int dc_1 e^{-\frac{1}{2} \epsilon_1^{(0)} c_1^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{\epsilon_1^{(0)}}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega^2 + \pi^2/\beta^2}} \underset{\beta \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\sqrt{2\pi}}{\omega} \quad (34)$$

Тем самым, если ввести условное обозначение  $\det' \hat{L}$  — интеграл с исключённым наименьшим собственным числом — то бишь отщипив нулевую моду — мы получаем:

$$\boxed{\frac{G(\eta, -\eta, \beta)}{G_0(\beta)} = e^{-S_0} \cdot \left( \omega \beta \sqrt{\frac{S_0}{2\pi}} \right) \cdot \left( \frac{\det'(-\partial_\tau^2 + U''(x_{cl}(\tau)))}{\det'(-\partial_\tau^2 + \omega^2)} \right)^{-1/2}} \quad (35)$$

Возникновение множителя  $\sqrt{S_0}$ , связанного с нулевой модой — утверждение в действительности совершенно общего характера.

**Дискретный спектр** Помимо нулевой моды, имеется также ещё одно состояние дискретного спектра,  $\epsilon_1 = \frac{3}{4}\omega^2$ . Оно даст следующий вклад (отнормированный на соответствующий вклад  $\epsilon_2^{(0)} = \omega^2 + (2\pi/\beta)^2 \approx \omega^2$  от осциллятора:

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2^{(0)}} \underset{\beta \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\frac{3}{4}\omega^2}{\omega^2} = \frac{3}{4} \quad (36)$$

**Непрерывный спектр** Итак, самое сложное — вычисление состояния непрерывного спектра, бесконечного произведения (обратите внимание, нумерация в числителе начинается с  $n = 1$ , а в знаменателе — с  $n = 3$ , поскольку первых два состояния мы уже «отщипили» при работе с дискретным спектром). Для вычисления, это бесконечное произведение удобно прологарифмировать, а также воспользоваться приближенным решением трансцендентного уравнения  $k_n \approx p_n - \delta(p_n)/\beta$ :

$$\begin{aligned} \frac{\det''}{\det''} &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^2 + k_n^2}{\omega^2 + p_{n+2}^2} = \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{\omega^2 + k_n^2}{\omega^2 + p_{n+2}^2} \right) = \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{k_n^2 - p_{n+2}^2}{\omega^2 + p_{n+2}^2} \right) \right) \approx \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n^2 - p_{n+2}^2}{\omega^2 + p_{n+2}^2} \right) \approx \\ &\approx \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2p_{n+2}(k_n - p_{n+2})}{\omega^2 + p_{n+2}^2} \right) = \exp \left( \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\delta(p_n) - 2\pi)2p_{n+2}}{\omega^2 + p_{n+2}^2} \right) \end{aligned} \quad (37)$$

Вообще говоря, тот факт, что  $k_n$  и  $p_n$  очень близки (по  $\frac{1}{\beta}$ ) на всём промежутке произведения означает, что все члены произведения очень близки к 1, и только за счёт их большого количества ( $\sim \beta$ ) это произведение оказывается отличным от единицы (а сумма — от нуля). Для суммирования плавной функции, удобно заменить сумму на интеграл, согласно  $\sum_n = \int_0^\infty \frac{\beta dp}{\pi}$  и увидеть, что  $\beta$  из ответа полностью выпадает, а ответ — конечный:

$$\frac{\det''}{\det''} = \exp \left( \int_0^\infty \frac{dp}{\pi} \frac{2p(\delta(p) - 2\pi)}{\omega^2 + p^2} \right) \quad (38)$$

Обратим внимание, что полученный тут член  $2\pi$  обеспечивает сходимость интеграла на бесконечности (ведь  $\delta(p \rightarrow \infty) \rightarrow 2\pi$ ); в противном случае интеграл бы логарифмически расходился. Само число  $2\pi$  явно связано с количеством связанных состояний; но ровно с этим же и связана фаза  $\delta(p \rightarrow \infty)!$  — поэтому теорема Левинсона, о которой сказано в примечании, в действительности гарантирует сходимость этого интеграла на бесконечности. Следующий шаг — интегрирование по частям:

$$\frac{\det''}{\det''} = \exp \left( -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty dp \frac{d\delta}{dp} \ln \frac{\omega^2 + p^2}{\omega^2} \right) \quad (39)$$

Прелесть этого выражения ещё и в том, что этот неприятный  $2\pi$ -член, который «помнит» о количестве связанных состояний, в него не входит; а кроме того, фаза — вообще говоря, многозначная функция, и плохо определена (с точностью до  $2\pi n$ ), а вот производная фазы определена уже хорошо. Поэтому, например, в инстантонной азбуке не сильно «замораживаются» с явным выражением для фазы и отделением этого  $2\pi$ -члена, а приходят к этому выражению, с которым уже и работают.

Итак, оставшийся интеграл обезразмеривается подстановкой  $p = \omega y$ , считается явно и даёт:

$$\int_0^\infty dp \frac{d\delta}{dp} \ln \left( 1 + \frac{p^2}{\omega^2} \right) = 2 \int_0^\infty dy \ln(1 + y^2) \left[ \frac{1}{y^2 + 1} + \frac{2}{4y^2 + 1} \right] = 2\pi \ln 3, \quad (40)$$

а вклад от непрерывного спектра равен:

$$\frac{\det''}{\det''} = \frac{1}{9} \quad (41)$$

## Одноинстантонный ответ

Во-первых, тем самым мы получили ответ для отношения детерминантов (с исключённой нулевой модой):

$$\frac{\det'(-\partial_\tau^2 + \omega^2 - \frac{3\omega^2/2}{\cosh^2(\omega\tau/2)})}{\det'(-\partial_\tau^2 + \omega^2)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{12} \quad (42)$$

и мы получили следующий ответ (в одноинстантонном приближении):

$$\boxed{\frac{G(\eta, -\eta, \beta)}{G_0(\beta)} = e^{-S_0} \cdot \underbrace{\left( \omega\beta\sqrt{\frac{S_0}{2\pi}} \right)}_{\text{zero mode}} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{4}{3}}}_{\text{bound state}} \cdot \underbrace{\sqrt{12}}_{\text{continuous spectrum}} = \sqrt{\frac{6}{\pi}} S_0 \omega \beta e^{-S_0}} \quad (43)$$

Наличие тут явной зависимости от бесконечной величины  $\beta$  должно смущать — ведь мы рассматриваем предел  $\beta \rightarrow \infty$ . В действительности же этот ответ, как инстантонная поправка, получен в пределе, покуда он мал —  $\sqrt{S_0} \omega \beta e^{-S_0} \ll 1$  — и поэтому буквально бесконечной  $\beta$  сделать не удастся. С другой стороны, от  $\beta$  он явно зависит не экспоненциальным образом, поэтому пока непонятно, как извлечь из него непосредственно туннельное расщепление.

В действительности же найденный ответ — это первый порядок разложения по  $e^{-S_0}$ . Настоящий же ответ устроен попросту как

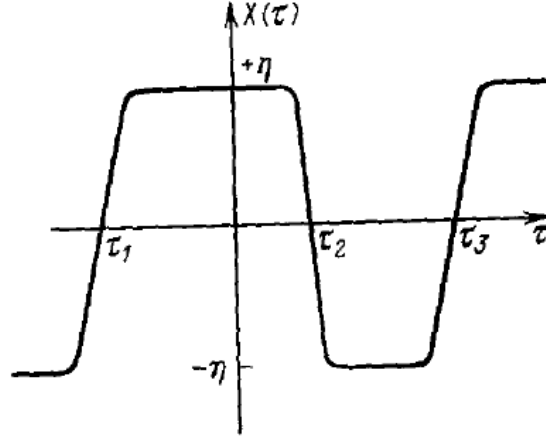
$$\frac{G(\eta, -\eta, \beta)}{G_0(\beta)} = \sinh(\Delta\beta), \quad \boxed{\Delta = \omega \cdot \sqrt{\frac{6S_0}{\pi}} e^{-S_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \omega \cdot \sqrt{\omega\eta^2} e^{-2\omega\eta^2/3}}. \quad (44)$$

То, что ответ должен быть таким, само по себе достаточно очевидно — мы знаем, что в реальном времени если посадить частицу в одну из ям, то она будет испытывать осцилляции Раби  $\sin(\Delta t)$ , и  $\Delta$  даётся как раз туннельным расщеплением симметричного и антисимметричного состояния. В мнимом же времени, экспоненциальная зависимость восстанавливается; рассматривая разложения по собственным модам вида  $G(x, y, \beta) = \sum_n \psi_n(x) \psi_n^*(y) e^{-\beta E_n}$ , мы немедленно понимаем, что в задаче имеется пара уровней энергии  $E = \frac{\omega}{2} \pm \Delta$ . Тем не менее, чтобы получить этот ответ систематически, необходимо уйти за рамки одноинстантонного приближения, и рассмотреть многоинстантонные вклады.

## Разреженный инстантонный газ

Помимо найденной единственной траектории  $x_{cl}(\tau)$ , при которой частица перекачивается из одного «горба» перевёрнутого потенциала на другой, имеются также и траектории, в которых она многократно катается «туда-сюда» (см. рис.).

Рис. 3: Многоинстантонная конфигурация



Давайте выясним, как устроен вклад от таких траекторий в приближении, что инстантоны расположены достаточно далеко друг от друга (это приближение носит название приближения разреженного инстантонного газа; ниже мы выясним, какому параметру оно соответствует). Во-первых, действие на такой траектории из  $n$  инстантонов, очевидным образом, будет равно  $S_n = nS_0$ , а эффективный потенциал с экспоненциальной точностью устроен как набор аналогичных ям от каждого инстантона. Интуитивно понятно, что и квадратичные флуктуации вблизи каждого инстантона факторизуются, поскольку инстантоны достаточно хорошо разнесены в пространстве<sup>5</sup>; это можно показать и явно. В каждой из ям будет свой набор состояний дискретного спектра, поэтому вклад от последнего факторизуется. Непрерывный же спектр устроен безотражательно для каждого из инстантонов — поэтому полная фаза рассеяния на всех инстантонах будет попросту суммой фаз от каждого из инстантонов,  $\delta^{(n)}(p) = n\delta(p)$  — из-за чего факторизуется также и вклад от непрерывного спектра. Наконец, с каждым из инстантонов будет связана своя нулевая мода — интегрирование по положению его центра; и вклад от нулевых мод будет устроен следующим образом:

$$\int_{-\beta/2 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < \beta/2} d\tau_1 \dots d\tau_n = \frac{\beta^n}{n!} \quad (45)$$

Для перехода  $-\eta \rightarrow \eta$ , только конфигурации с нечётным количеством инстантонов дают вклад. Поэтому, суммирование разреженного инстантонного газа приводит к следующему ответу:

$$\frac{G(\eta, -\eta, \beta)}{G_0(\beta)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left( \sqrt{\frac{6}{\pi}} S_0 \omega \beta e^{-S_0} \right)^{2n+1} = \sinh \left( \sqrt{\frac{6}{\pi}} S_0 \omega \beta e^{-S_0} \right) \quad (46)$$

Точно такое же суммирование можно было бы провести и для, например,  $\eta \rightarrow \eta$ . В таком случае очевидным образом вклад давали бы только конфигурации с чётным количеством инстантонов, и в ответе ожидаемым образом получился бы  $\cosh$ .

Давайте выясним, по какому параметру работает наше приближение. Мы имеем дело с суммой  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Delta\beta)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ . Члены этого ряда с  $n$  сначала возрастают (из-за, вообще говоря, большого множителя  $\Delta\beta$ ), а затем убывают (из-за факториала в знаменателе — ряд-то сходится!). Можно убедиться, что пик приходится на  $n^* \approx \Delta\beta$ , и именно такие инстантонные конфигурации дают наибольший вклад в сумму, и условие разреженности должно выполняться именно для них. С другой стороны, типичная ширина каждого инстантона равна, как мы помним,  $\omega^{-1}$ ; требование сводится к тому, что ширина  $n^*$  инстантонов должна быть по-прежнему маленькой по сравнению со всей длиной отрезка  $\beta$ . Этот критерий соответствует  $\Delta \ll \omega$ ; тем самым, наше приближение работает только покуда инстантонная поправка является маленькой (что совершенно ожидаемо) — это, в свою очередь, соответствует туннельному пределу  $S_0 \gg 1$ .

<sup>5</sup>Чуть более формально это можно было бы понять, наверное, следующим образом. Если между инстантонами установить бесконечные стенки, то такого рода факторизация будет совершенно очевидна — каждый из инстантонов будет «жить» в своём ящике. А дальше можно спекулировать о том, что из «термодинамических» соображений установка стенок вдали от ям слабо модифицирует задачу.