

Задачи к семинару «Топологические изоляторы. Модель Su-Schrieffer-Heeger»

Упражнения (60 баллов)

Упражнение 1. Почти нулевые моды (20 баллов)

Рассмотрите цепочку SSH, находящуюся в топологической фазе, и содержащую $2N$ узлов. Определите с экспоненциальной точностью энергию краевых состояний — тех, которые в пределе $N \rightarrow \infty$ являются нулевыми.

Упражнение 2. Численный анализ (20 баллов)

Исследуйте численно спектр цепочки конечной чётной длины (например, 20 узлов). Постройте уровни энергии как функции отношения $\frac{t_1}{t_2} \in (0, 2)$. Проследите, как пропадают (возникают) краевые состояния. Прodelайте то же для цепочки нечётной длины (скажем, 19 узлов). Постройте координатную структуру краевых состояний для какого-нибудь выбранного вами отношения t_1/t_2 .

Упражнение 3. $\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}_2$ (20 баллов)

Придумайте обобщение модели SSH — фазу, в которой число намотки равно $w = 2$. Что можно сказать о краевых состояниях в этой фазе?

Задача. Обобщение модели (40 баллов)

Изучите обобщение модели SSH, в которой количество чередующихся амплитуд — не две, а произвольное число N :

$$\hat{H} = \sum_i (t_i |i\rangle \langle i+1| + \text{h.c.}), \quad t_{i+N} \equiv t_i \quad (1)$$

1. Обладает ли система киральной симметрией? Покажите, что система может быть изолятором только для чётных N (при нулевом химическом потенциале — когда состояния с $E < 0$ заполнены, а $E > 0$ — пустые).
2. Выпишите Блоховский гамильтониан $\hat{\mathcal{H}}(k)$. При каком условии на амплитуды t_i закрывается щель между ближайшими к $E = 0$ зонами?
3. Рассмотрите край образца. При каком условии на амплитуды t_i в системе имеются топологически защищённые краевые состояния на нулевой энергии?