

# Задачи к семинару «Модель Калдейры-Леггетта»

## Задачи (100 баллов)

### Задача 1. Модель Рубина (это фамилия) (25 баллов)

Рассмотрите тяжёлую частицу массы  $M$ , которая соединена с баней, моделируемой одномерным полубесконечным кристаллом. В гармоническом приближении, система описывается следующим гамильтонианом:

$$H = \frac{\hat{P}^2}{2M} + V(\hat{X}) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\hat{p}_n^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} (\hat{u}_{n+1} - \hat{u}_n)^2 \right) + \frac{m\omega_0^2}{2} (\hat{X} - \hat{u}_1)^2 \quad (1)$$

Вычислите явный вид спектральной плотности  $J(\omega)$ , а также вид «диссипативного» ядра  $\gamma(t)$ .

### Задача 2. Кинетическое уравнение (35 баллов)

В рамках приближения Борна-Маркова выведите уравнение на координатную матрицу плотности  $\rho(x, x', t) = \langle x | \hat{\rho}(t) | x' \rangle$  в модели Калдейры-Леггетта с омической баней<sup>1</sup>

### Задача 3. Расплывание волнового пакета (что, опять?) (40 баллов)

**Упражнение. Преамбула (5 баллов)** Как известно из квантовой механики, волновые пакеты имеют обыкновение расплываться. С другой стороны, как известно, электрон имеет массу  $m = 9.1 \cdot 10^{-28}$ g, и его «классический радиус»  $x_0 \simeq 10^{-13}$ cm (определяемый как его комптоновская длина волны). Пусть в начальный момент времени электрон представлял собой ровно такой волновой пакет:

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi x_0^2)^{1/4}} e^{-x^2/4x_0^2} \quad (2)$$

Найдите его ширину через время  $t = 1\mu$ s.

**Задача (35 баллов)** В предыдущем упражнении вы должны были получить ответ, который должен был вас удивить и насторожить. Рассмотрите теперь движение свободного электрона ( $V_{\text{eff}}(X) = 0$ ), взаимодействующего с окружающей средой в рамках модели Калдейры-Леггетта с омической баней. Получите асимптотические выражения для  $\langle \hat{x}^2(t) \rangle$  в следующих режимах:

- Классическая диффузия:  $Tt \gg 1$
- Квантовая диффузия:  $Tt \ll 1$

Чтобы не рассматривать «баллистические» эффекты, оценённые в «преамбуле», можете также считать  $\omega_c \gg \gamma \gg t^{-1}$ .

---

<sup>1</sup> Данное уравнение, после преобразования Вигнера, является квантомеханическим обобщением уравнения Фоккера-Планка