

Задачи к семинару «Формализм Гельфанда-Яглома»

Упражнение. «Математический маятник», продолжение (10 баллов)

Вычислите функциональный детерминант, возникающий при исследовании задачи из предыдущего семинара, и сравните его с полученным непосредственным вычислением.

Задача 1. Модификации Гельфанда-Яглома (50 баллов)

Покажите, как нужно модифицировать теорему Гельфанда-Яглома для вычисления следующих определителей типа уравнения Шрёдингера:

1. **(30 баллов)** Одномерный оператор $\hat{H} = -\partial_x^2 + U(x)$, но для случая периодических граничных условий $\psi(x) \equiv \psi(x + L)$. Вычислите отношение определителей $\det(-\partial_x^2 + k_1^2) / \det(-\partial_x^2 + k_2^2)$.
2. **(10 баллов)** Двумерный оператор $\hat{H} = -\nabla^2 + U(r)$ для сферически-симметричного потенциала.
3. **(10 баллов)** Аналогично, трёхмерный случай.

Задача 2. Дзета-функция Бесселя? (40 баллов)

1. Вычислите следующее бесконечное произведение, в котором $\mu_n^{(m)}$ — n -тый нуль m -той функции Бесселя $J_m(z)$ (очевидным образом $J_{m>0}(0) = 0$; и этот тривиальный нуль в произведении не участвует):

$$P_m(R) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (\mu_n^{(m)}/R)^2}{(\mu_n^{(m)}/R)^2}. \quad (1)$$

Для этого найдите операторы, которые дают соответствующие собственные числа, а затем вычислите их отношения, используя теорему Гельфанда-Яглома.

2. Пусть λ_n — все собственные числа эрмитового оператора $\hat{H}$. Покажите, что «дзета-функцию» оператора $\hat{H}$, которую мы определим следующим образом:

$$\zeta_H(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^s} \quad (2)$$

для натурального аргумента $s \in \mathbb{N}$ можно сосчитать следующим образом:

$$\zeta_H(s) = \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!} \frac{\partial^s}{\partial \lambda^s} \left(\ln \frac{\det(\hat{H} + \lambda)}{\det \hat{H}} \right) \Big|_{\lambda=0} \quad (3)$$

3. Докажите следующие равенства:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_n^{(0)})^2} = \frac{1}{4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_n^{(0)})^4} = \frac{1}{32}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_n^{(1)})^2} = \frac{1}{8} \quad (4)$$