Задачи к семинару «Модель Калдейры-Леггетта»

Задачи (100 баллов)

Задача 1. Модель Рубина (это фамилия) (25 баллов)

Рассмотрите тяжёлую частицу массы M, которая соединена с баней, моделируемой одномерным полубесконечным кристаллом. В гармоническом приближении, система описывается следующим гамильтонианом:

$$H = \frac{\hat{P}^2}{2M} + V(\hat{X}) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\hat{p}_n^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} (\hat{u}_{n+1} - \hat{u}_n)^2 \right) + \frac{m\omega_0^2}{2} (\hat{X} - \hat{u}_1)^2 \tag{1}$$

Вычислите явный вид спектральной плотности $J(\omega)$, а также вид «диссипативного» ядра $\gamma(t)$.

Задача 2. Кинетическое уравнение (35 баллов)

Используя приближение Борна-Маркова для омической бани со спектральным весом $J(\omega) = \eta\omega$, выведите уравнение на преобразование Вигнера матрицы плотности $\rho_W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t)$.

Задача 3. Расплывание волнового пакета (что, опять?) (40 баллов)

Упражнение. Преамбула (5 баллов) Как известно из квантовой механики, волновые пакеты имеют обыкновение расплываться. С другой стороны, как известно, электрон имеет массу $m = 9.1 \cdot 10^{-28}$g, и его «классический радиус» $x_0 \simeq 10^{-13}$cm (определяемый как его комптоновская длина волны). Пусть в начальный момент времени электрон представлял собой ровно такой волновой пакет:

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi x_0^2)^{1/4}} e^{-x^2/4x_0^2} \tag{2}$$

Найдите его ширину через время $t = 1\mu$s.

Задача (35 баллов) В предыдущем упражнении вы должны были получить ответ, который должен был вас удивить и насторожить. Рассмотрите теперь движение свободного электрона, взаимодействующего с окружающей средой в рамках модели Калдейры-Леггетта с омической баней. Получите асимптотические выражения для $\left\langle \hat{x}^2(t) \right\rangle$ в следующих режимах:

- Классическая диффузия: $Tt \gg 1$
- Квантовая диффузия: $Tt \ll 1$

Чтобы не рассматривать «баллистические» эффекты, оценённые в «преамбуле», можете также считать $\omega_c \gg \gamma \gg t^{-1}$.

Указание: решите операторные уравнения движения в общем виде, используя их функцию Грина и пренебрегая вкладом от начальных условий. Это позволит свести вычисление искомой дисперсии к единственному интегралу по частоте, который затем предлагается исследовать в различных асимптотических режимах.