

Функциональный интеграл

Упражнение (10 баллов)

Восстановите координатную зависимость пропагатора квантового гармонического осциллятора $G(x, y, T)$. Исходя из полученного выражения, найдите его спектр.

Задачи (90 баллов)

Задача 1. Пропагатор свободной частицы (15 баллов)

Вычислите интеграл для запаздывающего пропагатора свободной частицы явно, используя дискретизацию по времени:

$$G(x, y, t > 0) \underset{\epsilon \rightarrow 0}{=} \left(\frac{m}{2\pi i \epsilon} \right)^{N/2} \int \prod_{k=1}^{N-1} dx_k \exp \left(i \epsilon \sum_{k=1}^N \frac{m}{2} \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{\epsilon} \right)^2 \right), \quad x_0 \equiv x, \quad x_N \equiv y \quad (1)$$

Задача 2. Частица в магнитном поле (40 баллов)

Вычислите пропагатор квантовой частицы, движущийся в плоскости в постоянном магнитном поле B , перпендикулярном этой плоскости ($\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$):

$$G(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, T) = \int_{\mathbf{r}(0)=\mathbf{R}_1}^{\mathbf{r}(T)=\mathbf{R}_2} \mathcal{D}[\mathbf{r}(t)] \exp \left(\frac{i}{2\hbar} \int_0^T \left[m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{e}{c} B(x\dot{y} - y\dot{x}) \right] dt \right) \quad (2)$$

(сперва убедившись, что данное действие действительно описывает именно эту систему). Используя функцию Грина, найдите спектр соответствующей квантовой задачи (решение которой, напомним, даётся макроскопически вырожденными уровнями Ландау).

Подсказка: хотя этот интеграл можно вычислить и непосредственно, может оказаться удобным переход во «вращающуюся систему отсчёта» — провести следующую замену в функциональном интеграле:

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) \cos \Omega t + y(t) \sin \Omega t \\ y'(t) &= -x(t) \sin \Omega t + y(t) \cos \Omega t \end{cases} \quad (3)$$

и при правильном выборе частоты Ω , задача значительно упрощается. Не забудьте о модификации граничных условий из-за такой замены!

Задача 3. Статистическая механика струны (35 баллов)

Рассмотрите модель одномерной струны, закреплённой в точках $l = 0$ и $l = L$, состояние которой описывается её отклонением от положения равновесия $u(l)$. Струна находится под натяжением с силой F , поэтому произвольная её конфигурация обладает избыточной энергией:

$$E[u] = F \int_0^L dl \left(\sqrt{1 + (\partial u / \partial l)^2} - 1 \right) \approx \frac{1}{2} F \int_0^L dl u'^2(l) \quad (4)$$

Рассмотрите термодинамические флуктуации такой струны, нагретой до температуры $T = \beta^{-1}$ — так что вероятность произвольной конфигурации определяется Гиббсовским весом $P[u] \propto \exp(-\beta E[u])$. Определите функцию распределения отклонения струны в точке l от её положения равновесия $P(u, l) = \langle \delta(u - u(l)) \rangle$.