Формализм Гельфанда-Яглома

Упражнение. «Математический маятник», продолжение (10 баллов)

Вычислите функциональный детерминант, возникающий при исследовании задачи из предыдущего семинара, и сравните его с полученным непосредственным вычислением.

Задачи (90 баллов)

Задача 1. Модификации Гельфанда-Яглома (50 баллов)

Покажите, как нужно модифицировать теорему Гельфанда-Яглома для вычисления следующих определителей типа уравнения Шрёдингера:

1. **(30 баллов)** Одномерный оператор $\hat{H} = -\partial_x^2 + U(x)$, но для случая периодических граничных условий $\psi(x) \equiv \psi(x+L)$. Вычислите отношение определителей $\det(-\partial_x^2 + k_1^2)/\det(-\partial_x^2 + k_2^2)$.
Указание: оказывается гораздо проще выводить формулу не в дискретном представлении, а явным предоставлением функции, которая равна нулю для собственных функций гамильтониана (т.е. характеристического многочлена). Эту функцию можно предоставить, рассмотрев линейную комбинацию двух линейно-независимых решений на произвольной энергии; условие совместности граничных условий в общем виде и будет являться искомой функцией.

2. **(10 баллов)** Двумерный оператор $\hat{H} = -\nabla^2 + U(r)$ для сферически-симметричного потенциала.

3. **(10 баллов)** Аналогично, трёхмерный случай.

Задача 2. Дзета-функция Бесселя? (40 баллов)

1. Вычислите следующее бесконечное произведение, в котором $\mu_n^{(m)}$ — n-тый нуль m-той функции Бесселя $J_m(z)$ (очевидным образом $J_{m>0}(0) = 0$; и этот тривиальный нуль в произведении не участвует):
$$P_m(R) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (\mu_n^{(m)}/R)^2}{(\mu_n^{(m)}/R)^2}. \tag{1}$$
Для этого найдите операторы, которые дают соответствующие собственные числа, а затем вычислите их отношения, используя теорему Гельфанда-Яглома.

2. Пусть λ_n — все собственные числа эрмитового оператора $\hat{H}$. Покажите, что «дзета-функцию» оператора $\hat{H}$, которую мы определим следующим образом:
$$\zeta_H(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^s} \tag{2}$$
для натурального аргумента $s \in \mathbb{N}$ можно сосчитать следующим образом:
$$\zeta_H(s) = \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!} \frac{\partial^s}{\partial \lambda^s} \left(\ln \frac{\det(\hat{H} + \lambda)}{\det \hat{H}} \right) \Bigg|_{\lambda=0} \tag{3}$$

3. Докажите следующие равенства:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_n^{(0)})^2} = \frac{1}{4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_n^{(0)})^4} = \frac{1}{32}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_n^{(1)})^2} = \frac{1}{8} \tag{4}$$