Открытые двухуровневые системы

Задачи (100 баллов)

Задача 1. Флуктуационно-диссипационная теорема (15 баллов)

Вне зависимости от происхождения индуцированного окружающей средой шума $\hat{\Phi}(t)$, на его корреляционные функции можно вывести соотношения самого общего вида, использующие лишь следующие общие предположения: гамильтониан $\hat{H}_e$ не зависит от времени; и матрица плотности окружающей среды имеет вид $\hat{\rho}_e = \frac{1}{Z}e^{-\beta \hat{H}_e}$.

1. Используя формальное сходство между матрицей плотности и оператором эволюции в мнимом времени, покажите, что имеется связь на корреляционные функции $S_<(t) = S_>(t - i\beta)$. Что это означает для их фурье-образов, $S_<(\omega)$ и $S_>(\omega)$?

2. Определим «спектральную плотность» как $J(\omega) = \frac{1}{2}(S_>(\omega) - S_<(\omega))$, и Келдышевский коррелятор как $S_K(t_1 - t_2) = \left\langle \left\{ \hat{\Phi}(t_1), \hat{\Phi}(t_2) \right\} \right\rangle$. Как связаны $S_K(\omega)$ и $J(\omega)$?

Задача 2. Релаксация (20 баллов)

Полученное на семинаре время релаксации T_1 для спин-бозонной модели, описываемой гамильтонианом

$$\hat{H} = -\frac{\Delta}{2}\hat{\sigma}_z + \sum_n \omega_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \hat{\sigma}_x \hat{\Phi}, \quad \hat{\Phi} = \sum_n \lambda_n (\hat{a}_n + \hat{a}_n^\dagger) \tag{1}$$

можно просто интерпретировать на языке золотого правила Ферми.

1. Считая, что все осцилляторы находятся в квантовом состоянии с фиксированными числами заполнения n_n, вычислите частоту переходов $w_{i\to f} = w_{\uparrow\to\downarrow}$ и $w_{\downarrow\to\uparrow}$.

2. Проведите усреднение полученных величин по Гиббсовскому ансамблю для осцилляторов $\hat{\rho}_e = \frac{1}{Z}e^{-\beta \hat{H}_e}$.

3. Релаксационная динамика, описываемая золотым правилом Ферми, может быть сведена к классическому «кинетическому уравнению»:

$$\begin{cases} \frac{dP_\uparrow(t)}{dt} & = -w_{\uparrow\to\downarrow} P_\uparrow(t) + w_{\downarrow\to\uparrow} P_\downarrow(t) \\ \frac{dP_\downarrow(t)}{dt} & = -w_{\downarrow\to\uparrow} P_\downarrow(t) + w_{\uparrow\to\downarrow} P_\uparrow(t) \end{cases} \tag{2}$$

   Исходя из такого уравнения, выразите время релаксации системы через величины $w_{\uparrow\to\downarrow}$ и $w_{\downarrow\to\uparrow}$ и сравните со временем релаксации, найденным на семинаре.

Задача 3. Чистая дефазирока (50 баллов)

Исследуйте эволюцию матрицы плотности двухуровневой системы, взаимодействующую с резервуаром (набором осцилляторов). Система описывается следующим гамильтонианом:

$$\hat{H} = -\frac{\Delta}{2}\hat{\sigma}_z + \sum_n \omega_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \hat{\sigma}_z \hat{\Phi}, \quad \hat{\Phi} = \sum_n \lambda_n (\hat{a}_n + \hat{a}_n^\dagger) \tag{3}$$

1. Перейдите к представлению взаимодействия. Оператор эволюции в представлении взаимодействия записывается при помощи T-упорядоченной экспоненты:

$$\hat{S}(t, t_0) = \hat{\mathcal{T}} \left\{ \exp\left(-i \int_{t_0}^{t} \hat{V}(\tau) d\tau \right) \right\} \tag{4}$$

   Гамильтониан в различные моменты времени не коммутирует сам с собой, поэтому $\mathcal{T}$-упорядочение убрать нельзя. Однако задачу можно значительно упростить, используя тот факт, что гамильтониан в различные моменты времени коммутирует на число:

$$[\hat{V}(t_1), \hat{V}(t_2)] = i\phi(t_1, t_2) \tag{5}$$

   Используя этот факт, покажите, что знак $\mathcal{T}$-упорядочения можно снять ценой дополнительной добавки:

$$\hat{S}(t, t_0) = e^{i\Phi(t, t_0)} \exp\left(-i \int_{t_0}^{t} \hat{V}(\tau) d\tau \right) \tag{6}$$

   Указание: это соотношение можно вывести «по индукции», рассмотрев $\hat{S}(t + \delta t, t_0) = \hat{S}(t + \delta t, t)\hat{S}(t, t_0)$ для $\delta t \to 0$, и объединив экспоненты при помощи формулы **Бейкера-Кэмбелла-Хаусдорфа**:

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = \exp\left(\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}\left[\hat{A}, \hat{B}\right] \right), \quad [\hat{A}, \hat{B}] = \text{const} \tag{7}$$

2. Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ матрица плотности системы имела вид $\hat{\rho}_{tot}(t_0) = \hat{\rho}_s(t_0) \otimes \hat{\rho}_e(t_0)$, и резервуар находится в равновесии при температуре T: $\hat{\rho}_e(t_0) = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}_0^{(e)}}$. Вычислите редуцированную матрицу плотности в произвольный момент времени:
$$\hat{\rho}_s(t) = \mathrm{Tr}_e \left(\hat{S}(t, t_0) \hat{\rho}_s(t_0) \hat{\rho}_e \hat{S}(t_0, t) \right) \tag{8}$$
Указание: для усреднения по степеням бани вам может пригодиться тождество из задачи 6.1.

3. Поскольку величина $\hat{\sigma}_z$ в данной задаче коммутирует с гамильтонианом, никакой релаксации наблюдаться не будет. Поэтому вся динамика сведётся к следующей временной зависимости матрицы плотности:
$$\hat{\rho}_s(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \cdot \exp(-\Gamma(t)) \\ \rho_{21} \cdot \exp(-\Gamma(t)) & \rho_{22} \end{pmatrix} \tag{9}$$
Найдите выражение для **функции декогеренции** $\Gamma(t)$.

Задача 4 (15 баллов)

Используя функцию декогеренции из предыдущей задачи:
$$\Gamma(t) = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty d\omega J(\omega) \coth \frac{\omega}{2T} \frac{1 - \cos \omega t}{\omega^2}, \tag{10}$$
исследуйте декогеренцию для омической бани, с модельной функцией $J(\omega) = \pi \alpha \omega e^{-\omega/\omega_c}$. Тут ω_c выступает в роли экспоненциальной ультрафиолетовой обрезки, и можно считать $\omega_c \gg T$.

Указание: для вычисления удобно отделить вклад чисто квантовых флуктуаций (при $T = 0$), который зависит от обрезки ω_c; а затем найти «температурный» вклад, для которого обрезку уже можно выбросить.