

Инстантоны и туннелирование

Упражнение. Квазиклассика (30 баллов)

Для двухъямного потенциала, что разбирался на семинаре, вычислите расщепление уровней в квазиклассическом приближении. Насколько квазиклассическое приближение отличается от правильного ответа, даваемого инстантонным вычислением?

Указание: стандартная формула в квазиклассическом приближении гарантирует правильный численный фактор в предэкспоненте; поэтому именно с такой точностью необходимо вычислить и квазиклассическое действие. Обратите внимание, что действие необходимо считать на энергии, отличной от минимума в соответствующей яме; поправка от этого отличия существенна, поскольку она стоит в экспоненте, и имеется серия неравенств $S(0) \gg |S(E) - S(0)| \gg 1$. Несложно убедиться, что эта поправка логарифмическая; причём **вычисление необходимо проводить с точностью до числа под логарифмом** (поскольку это число в конечном итоге модифицирует численный префактор в конечном ответе!).

Сделать это можно следующим образом. Во-первых, технически чуть проще вычислять не само действие $S(E)$, а его производную $\partial S/\partial E$, которая логарифмически расходится при $E \rightarrow 0$. Для вычисления численного фактора под логарифмом, предлагается ввести произвольный промежуточный пространственный масштаб Λ , удовлетворяющий серии неравенств $|x_1 + \eta| \ll \Lambda \ll \eta$ (где x_1 — положение левой точки остановки, которая близка к минимуму $-\eta$), и разбить интеграл на два интервала $\int_{x_1}^{\Lambda} + \int_{\Lambda}^0$. В первом интеграле первое же неравенство позволяет использовать осцилляторное приближение для потенциала; а во втором интеграле второе неравенство позволяет использовать разложение в ряд Тейлора по энергии. После соответствующих вычислений (с необходимой точностью!), промежуточный масштаб Λ , в силу своей произвольности, из ответа должен сократиться.

Задача. «Математический маятник» (70 баллов)

Рассмотрите движение частицы массы $m = 1$ в периодическом потенциале $U(x) = \lambda(1 - \cos \frac{x}{\eta})$. Вычислите одноинстантонный вклад в амплитуду перехода между двумя минимумами $0 \rightarrow 2\pi\eta$ за большое мнимое время β — Евклидову функцию Грина $G_E(2\pi\eta, 0, \beta)$.

1. **(5 баллов)** Найдите инстантонную траекторию, соответствующую такому переходу, вычислите действие на ней. Вычислите явно оператор, определяющий квадратичные флуктуации в окрестности инстантона.
2. **(10 баллов)** Исследуйте спектр полученного оператора. Вычислите фазовые сдвиги непрерывного спектра и уровни энергии связанных состояний.
3. **(10 баллов)** Рассмотрите отнормированный на осциллятор пропагатор. Идентифицируйте нулевую моду, выполните интегрирование по ней.
4. **(35 баллов)** Вычислите вклад в отношение определителей от дискретного и непрерывного спектра.
5. **(10 баллов)** Просуммируйте инстантонный газ для искомой амплитуды перехода. Сравнив полученный ответ с ответом для соответствующей модели сильной связи, извлеките из полученного ответа ширину зоны непрерывного спектра соответствующей квантомеханической задачи.