Теория рассеяния и формула Борна

Упражнения. Борновское приближение (20 баллов)

В рамках Борновского приближения, рассмотрите рассеяние на следующих потенциалах:

1. **(10 баллов)** $V(\boldsymbol{r}) = V_0 a^n/(r^n + a^n)$, $n > 3$, случай медленных частиц $ka \ll 1$. Рассмотрите также предел $n \to \infty$, когда потенциал превращается в сферическую прямоугольную яму.

2. **(10 баллов)** $V(\boldsymbol{r}) = (\alpha/r)e^{-\kappa r}$(потенциал Юкавы). Рассмотрите также предельный переход $\kappa \to 0$ (закон Кулона).

Задачи (80 баллов)

Задача 1. Welcome to Flatland! (50 баллов)

Одномерие (20 баллов) Выведите формулы Борновского приближения для одномерного пространства. Амплитуда рассеяния определяется согласно:

$$\psi(\boldsymbol{r}) = e^{i\boldsymbol{kr}} + f(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}') \cdot ie^{ik|\boldsymbol{r}|} \tag{1}$$

Определите критерии применимости приближения. Что из себя представляет величина f и как она связана с амплитудами прохождения и отражения t, r? Что из себя представляет сечение рассеяния в одномерии?

Двумерие (30 баллов) А теперь повторите вывод для двумерного пространства. В двумерии амплитуда определяется согласно:

$$\psi(\boldsymbol{r}) = e^{i\boldsymbol{kr}} + f(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}') \cdot e^{i\pi/4} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \tag{2}$$

Определите критерии применимости приближения. *Указание*: функция Грина свободного движения выражается через какие-то из модифицированных функций Бесселя.

Задача 2. Глубокий мелкий рассеиватель? (15 баллов)

Рассмотрите рассеяние медленных частиц на одномерном потенциале $V(x) = -e^2/\sqrt{x^2 + a^2}$. Используя результат предыдущей задачи, вычислите коэффициент прохождения частиц в ведущем Борновском приближении. Каков критерий его применимости?

Задача 3. Двухатомная молекула (15 баллов)

Смоделируем двухатомную полярную молекулу потенциалом вида $V(\boldsymbol{r}) = V_0(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{R}/2) + V_0(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}/2)$ (вектор $\boldsymbol{R}$ соединяет два атома, а $V_0(\boldsymbol{r})$ представляет собой потенциал рассеяния на отдельном атоме). В рамках Борновского приближения, свяжите дифференциальное сечение рассеяния на такой молекуле с сечением на отдельном атоме. Считая различные ориентации молекулы равновероятными, усредните по ним результат. Как связаны полные сечения рассеяния для случая медленных ($kR \ll 1$) и достаточно быстрых ($ka \sim 1$, но $R \gg a$, где a — характерный масштаб потенциала $V_0(r)$) частиц.